Paquets d'Arthur des représentations cohomologiques

Nicolas-Jose Arancibia-Robert

Université Paris VI - Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Science Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Nicolás Arancibia Robert

Paquets d'Arthur des représentations cohomologiques

---

dirigée par Colette Moeglin

Soutenue le 12 juin 2015 devant le jury composé de :

M. Nicolas Bergeron	Université Paris VI
M Gaëtan Chenevier	Université Paris XI
M Laurent Clozel	Université Paris XI
Mme Colette Moeglin	Université Paris VI
M. David Renard	École Polytechnique

Rapporteur absent lors de la soutenance :

M. Paul Mezo	Carleton University

Institut de Mathématiques de Jussieu
Case 247
4,place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

UPMC
Ecole Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
Boite courrier 290

Résumé

Résumé

Cette thèse a pour objectif de montrer que les paquets de représentations cohomologiques d'un groupe réductif classique quasi déployé, défini sur $\mathbb{R}$, construits par J. Arthur coïncident avec les paquets précédemments définis de manière plus élémentaire et plus explicite par Adams et Johnson. Ceci est finalement établi ici pour certains paquets, dont le paramètre $\psi : W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C}) \rightarrow {}^LG$ à caractère infinitésimal régulier, s'écrit sous la forme $\psi_1 \oplus \psi_2$, somme de deux morphismes avec ψ_1 de restriction à $SL(2,\mathbb{C})$ une somme de représentations irréductibles ayant toutes une dimension inférieure où égale à 4 et ψ_2 tel que Π_{ψ_2}, la représentation irréductible de $GL(N_2,\mathbb{R})$ associée, est un caractère ou l'induite d'un caractère de $GL(N_2-1,\mathbb{R})$ avec un caractère de $\mathbb{R}^*$.

Pour obtenir ce résultat on sépare le problème en deux parties bien distinctes. La première consiste à établir un résultat de réduction, qui ramène le cas d'un paramètre ψ général à celui d'un paramètre irréductible. Ceci fait l'objet des chapitres 3 et 5. La seconde consiste à traiter le cas des paramètres irréductibles, ce qu'on parvient à faire par des méthodes combinatoires si ceux-ci sont de rang ≤ 4, et ceci fait l'objet du chapitre 4 et de lâannexe A.

Le chapitre 1 concerne les représentations tordues et leur normalisation à l'aide des modèles de Whittaker. Le chapitre deux rappelle les constructions d'Adams et Johnson et les résultat de la thèse de Johnson qui donnent des résolutions pour les représentations qui nous intéressent.

Mots-clefs

Programme de Langlands, paquets d'Arthur, paquets d'Adams-Johnson, endoscopie tordue, trace tordue, transfert tordu.

Arthur's packets of cohomological representations

Abstract

The aim of this thesis is to prove that the packets of cohomological representation of quasi-split classical groups, defined over $\mathbb{R}$, by Arthur coincide with the packets defined

previously in a more elementary way by Adams and Johnson. We prove this for certain packets, those whose parameter ψ is of the form $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$, direct sum of two morphisms with the restriction of ψ_1 to $SL(2,\mathbb{C})$ a direct sum of irreducible representations of dimension less or equal than 4, and ψ_2 such that the associated irreducible representation Π_{ψ_2} of $GL(N_2,\mathbb{R})$ is a character or the induced of a character of $GL(N_2-1,\mathbb{R})$ with a character of $\mathbb{R}^*$.

To obtain this result we split the problem into two distinct parts; the first one consists of establishing a reduction result which allows us to reduce to the case of an irreducible parameter instead of a general parameter ψ. This is done in chapters 3 and 5. The second part consists of treating the case of irreducible parameters, which we do by combinatorial methods when the parameters are of rank less or equal than 4, this is done in chapter 4 and appendix A.

In the first chapter we introduce the twisted representations and their normalisation using Witthaker models. In the second chapter we recall the construction of Adams and Johnson and the results of the thesis of Johnson wich gives us resolutions for the representations we are interested in.

Keywords

Langlands program, Arthur packet, Adams-Johnson packet, twisted endoscopy, twisted trace, twisted transfer.

Table des matières

Introduction

Soit $\mathbf{G}$ un groupe classique défini sur le corps des réels, quasi-déployé, c'est-à-dire $\mathbf{SO}(p,q)$ avec $p-q=0,1$ ou 2 ou $\mathbf{Sp}(2n)$. Notons par $\widehat{G}$ son groupe dual et par ${}^LG$ le L-groupe associé,

$$ {}^LG = \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}}, $$

où $W_{\mathbb{R}}$ est le groupe de Weil de $\mathbb{R}$. Considérons aussi le groupe lineaire $GL(N)$ avec N égal à $2[p+q/2]$ si $\mathbf{G}$ est un group orthogonal et égal à $2n+1$ si $\mathbf{G}=\mathbf{Sp}(2n)$. Soit θ_N l'automorphisme involutif de $GL(N)$ opérant par,

$$ \theta_N(g) = J_N^{-1}({}^tg^{-1})J_N, $$

où J_N denote la matrice antidiagonale,

$$ J_N = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{N+1} & & & \end{pmatrix}. \tag{1} $$

Formons le produit semi-direct $GL(N) \rtimes \langle\theta_N\rangle$ et considérons la composante connexe $\widetilde{G}(N) := GL(N) \rtimes \theta_N$.

Soit ψ_G un paramètre d'Arthur pour $\mathbf{G}$, c'est-à-dire une classe de $\widehat{G}$-conjugaison d'homomorphismes continus, $\psi_G : W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C}) \to {}^LG$, tel que,

i.) La restriction à $W_{\mathbb{R}}$ de la composition de ψ_G avec ${}^LG \to W_{\mathbb{R}}$ nous donne $\mathrm{Id}_{W_{\mathbb{R}}}$.

ii.) La restriction $\psi_G|_{SL(2,\mathbb{C})}$ est holomorphe.

iii.) La restriction $\psi_G|_{W_{\mathbb{R}}}$ définit un homomorphisme admissible.

Pour cette thèse, nous supposons que le caractère infinitésimal associé à ψ_G est régulier et entier, ce qui simplifie grandement la situation.

L'inclusion standard St : ${}^LG \to GL(N,\mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}}$, voir equation **(2.2)**, nous permet d'étendre ψ_G en un paramètre d'Arthur pour $GL(N)$ et en suivant J. Arthur on peut associer à $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$ un L-paramètre φ_ψ de $GL(N)$ donné par,

$$ \varphi_\psi(w) = \psi\left(w, \begin{pmatrix} |w|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right). $$

On sait associer à un tel morphisme une représentation irréductible Π_ψ de $GL(N,\mathbb{R})$ en généralisant la correspondance de Langlands comme expliqué par J. Arthur. Pour tout

ψ la représentation Π_ψ est unitaire et θ_N-invariante, c'est à dire il existe un opérateur d'entrelacement A_{θ_N} entre Π_ψ et $\Pi_\psi \circ \theta_N$. D'après le lemme de Schur l'opérateur A_{θ_N} est unique à multiplication par un scalaire près et on peut en plus le choisir de manière à ce que $A_{\theta_N}^2 = \mathrm{Id}$. Le choix de A_{θ_N} avec $A_{\theta_N}^2 = \mathrm{Id}$ nous permet en définissant $\widetilde{\Pi}_\psi(\theta_N) = A_{\theta_N}$ d'étendre Π_ψ en une représentation $\widetilde{\Pi}_\psi$ de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_N\rangle$. Par conséquent pour Π_ψ on a deux extensions possibles à $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_N\rangle$, lesquelles diffèrent par un signe. La théorie des modèles de Whittaker comme l'a montré Arthur (**[Art13]** chapitre deux section **(2.2)**) nous donne une extension canonique $\widetilde{\Pi}_\psi$ de Π_ψ. Soit ρ_ψ le module standard associé à φ_ψ alors comme opérateur d'entrelacement il faut prendre l'opérateur d'entrelacement d'ordre deux qui preserve une fonctionnelle de Whittaker de ρ_ψ.

Supposons que notre paramètre ψ_G satisfait aussi les deux propriétés suivants ;

a. La restriction de ψ_G à $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow W_\mathbb{C} \hookrightarrow W_\mathbb{R}$ est triviale.

b. $\psi_G(SL(2,\mathbb{C}))$ contient un élément regulier unipotent du centralisateur $\mathrm{Cent}(\psi_G(W_\mathbb{C}), \widehat{G})$.

À un tel paramètre ψ_G, J. Adams et J. Johnson ont associé dans **[AJ87]**, définition **(2.11)** un ensemble fini de représentations que nous notons $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$. Tout représentations dans $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ a été décrite par Vogan et Zuckerman dans **[VZ84]**. Elles sont toutes unitaires et avec leur $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie non-nulle. La conjecture à démontrer est que ces représentations sont exactement celles associées par Arthur dans **[Art13]**, théorème **(2.2.1)**, au paramètre ψ_G.

Dans **[AJ87]** J. Adams et J. Johnson ont construit une combinaison linéaire à coefficients plus ou moins 1 des ces représentations en montrant que cette combinaison linéaire que nous notons Θ_{ψ_G} est stable (théorème **(2.13)** de **[AJ87]**). En plus ces représentations vérifient les transfert endoscopiques ordinaires (théorème **(2.21)** de **[AJ87]**) par conséquent ce qu'il nous faut démontrer est que la distribution stable construite par Adams-Johnson se transfère en la trace tordue de la représentation de $\widetilde{G}(N,\mathbb{R})$ associée à $\mathrm{St} \circ \psi_G$.

L'idée pour démontrer cela est d'utiliser l'écriture de la distribution stable d'Adams-Johnson, Θ_{ψ_G}, en termes de modules standard comme écrit dans **[AJ87]** corollaire **(8.9)**.

Cette écriture est particulièrement bien adaptée au transfert car elle a les propriétés suivantes :

On considère l'ensemble des modules standard dont le quotient irréductible est inférieur ou egal (au sens de Vogan) à l'une des représentations dans $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$; cela donne un ensemble d'induites $I_{P_G}(\sigma)$ (où P_G est un sous-groupe parabolique de Levi M_G de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ et σ une repésentation irréductible tempérée modulo le centre de M_G (en fait, grâce à la regularité du caractère infinitésimal, σ est une série discrète modulo le centre)). Si $I_{P_G}(\sigma)$ est dans cet ensemble alors $I_{P_G}(\sigma')$ y est aussi si σ' est dans le même paquet de Langlands que σ. Et la combinaison linéaire stable s'écrit aussi,

$$\Theta_{\psi_G} = \sum_{(P_G,\sigma)} (-1)^{l(P_G,\sigma)} I_{P_G}(\sigma), \tag{2}$$

où $l(P_G,\sigma)$ est la longeur de Vogan du sous-quotient de Langlands de $I_{P_G}(\sigma)$ et où (P_G,σ) décrit un sous-ensemble de l'ensemble ci-dessus où la restriction ne porte que sur le fait que si $I_{P_G}(\sigma)$ apparait alors $I_{P_G}(\epsilon \cdot \sigma)$ n'apparait pas si ϵ est un caractère quadratique de M_G et $\epsilon \cdot \sigma$ n'est pas isomorphe à σ. D'après le lemme **(8.8)** de **[AJ87]** le sous-ensemble garde la propriété que si $I_{P_G}(\sigma)$ y est alors $I_{P_G}(\sigma')$ y est aussi si σ' est dans le meme paquet de Langlands que σ. Le choix des σ dans leur orbite sous les caractères quadratiques est assez subtil (Voir **[Joh84]** chapitre 5 théorème **(1)** et chapitre 6 théorème **(1)**) mais le problème est facilement contourné dans ce travail. Considérons pour tout $I_{P_G}(\sigma)$ intervenant dans **(2)** le L-paramètre de $\mathbf{G}$ associé au paquet de Langlands contenant le sous-quotient de Langlands de $I_{P_G}(\sigma)$, notons par Φ_G l'ensemble de ces paramètres et pour tout $\varphi_G \in \Phi_G$ soit Θ_{ϕ_G} la somme des modules standards avec φ_G comme paramètre associé. D'après **(2)** pour Θ_{ψ_G} on a l'égalité,

$$\Theta_{\psi_G} = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\varphi_G)} \Theta_{\varphi_G}, \tag{3}$$

où $l(\varphi_G)$ est la longueur de Vogan de Π_{φ_G}, c'est-à-dire la longueur de Vogan de n'importe quel élément intervenant dans la somme Θ_{φ_G} (la longueur $l(\varphi_G)$ est bien défini car la longueur de Vogan pour tout élément intervenant dans la somme Θ_{φ_G} est la même, voir paragraphé qui précède le théorème **(8.2)** de **[AJ87]**). Par conséquent pour le transfert tordu de Θ_{ψ_G} on a l'égalité,

$$\mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\psi_G}) = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}). \tag{4}$$

Grâce aux résultats récents de Paul Mezo **[Mez]** (Voir chapitre deux section **(2.2.2)** pour une description plus détaillée, où en plus on explique un problème avec le facteur de transfert spectral), on sait comme transférer vers $GL(N,\mathbb{R}).\theta_N$ la trace d'un module standard de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, c'est la trace tordue (défini par rapport à l'opérateur A_{θ_N}) du module standard qui s'obtient par transfert des paramètres, plus clairement, pour φ_G un L-paramètre de $\mathbf{G}$ on définit le transfert tordu $\mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G})$ de Θ_{φ_G} comme la trace tordue du module standard associé au L-paramètre $\varphi := \mathrm{St} \circ \varphi_G$ de $GL(N,\mathbb{R})$.

Le but de la thèse est de montrer donc pour tout paramètre d'Arthur ψ_G de $\mathbf{G}$ qui satisfait les proprietés **a.)** et **b.)**, l'égalité,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) =& \epsilon_{\psi_G} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\psi_G}) \\ =& \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} \epsilon_{\psi_G} (-1)^{l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}). \end{aligned} \tag{5}$$

où $\epsilon_{\psi_G} \in \{-1, 1\}$ (Voir chapitre 2 section **(2.2.2)** pour une description précise) et la trace tordue est défini par rapport à l'opérateur A_{θ_N}.

Par des propriétés d'algèbre linéaire élémentaire, on décompose le morphisme $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$ en somme de morphismes élémentaires : disons qu'un morphisme est élémentaire si la représentation de $W_\mathbb{R} \times SL(2,\mathbb{C})$ définie par ψ est irréductible, c'est-à-dire que la représentation Π_ψ est un module de Speh basé sur une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$ ou est un caractère de $GL(N,\mathbb{R})$ mais il faut considérer aussi le cas particulier qui apparaît pour les groupes $\mathbf{SO}(N)$, N pair, où Π_ψ est l'induite d'un caractère de $GL(N-1,\mathbb{R})$ avec un caractère de $\mathbb{R}^*$. On remarque que dans ce dernier cas le caractère infinitésimal de Π_ψ n'est pas régulier, ce cas là induit une différence qui est expliquée dans la thése et empêche d'avoir une belle résolution.

Le premier résultat est de ramener le problème général au problème d'un morphisme élémentaire. Ce résultat découle d'une description précise du comportement des traces tordues par induction et utilise de façon clé l'hypothèse sur le caractère infinitésimal ; les induites que l'on a à regarder sont irréductibles mais l'action de θ_N est subtile, il faut utiliser de façon fine la théorie des opérateurs d'entrelacement et leurs propriétes de méromorphie.

Plus precisement, soit $\psi = \oplus_{i=1}^r \psi_i$ une décomposition de ψ en somme de morphismes élémentaires avec chaque ψ_i une représentation irréductible de $W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C})$ de dimension N_i. Soit $M = \Pi_{i=1}^r GL(N_i)$, sur M on fait agir l'automorphisme involutif,

$$\theta_M(m) = J_M(\ {}^t m^{-1}) J_M^{-1},$$

ou J_M est donné par une matrice défini par blocs avec chaque bloc une matrice anti-diagonale d'ordre N_i défini comme dans **(1)**. Notons aussi, $w_M = J_N \cdot J_M^{-1}$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ soit $I(\Pi_{\psi_i})$ le module standard de $GL(N_i, \mathbb{R})$ avec Π_{ψ_i} comme unique sous-modules irréductible et définissons $\Pi_M = \otimes_{i=1}^r I(\Pi_{\psi_i})$.

Au chapitre trois on montre (Lemmes **(3.1.4)**, **(3.1.5)** et **(3.1.6)**) pour tout représentation π_M irréductible, θ_M-invariante et isomorphe à un sous-quotient de Π_M, que si nous choisissons un opérateur $A_{\pi_M} : \pi_M \to \pi_M \circ \theta_M$ (normalisé par rapport à une fonctionnelle de Whittaker du module standard avec π_M comme unique sous-module irréductible) alors le morphisme défini pour tout $f \in \mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ (P le sous-groupe parabolique de Lévi $M(\mathbb{R})$ contenant l'ensemble des matrices triangulaires supérieurs) par la composition,

$$A_{\pi_M}((N(w_M, \underline{0}, \pi_M)(f))(\theta_N(g))), \quad g \in GL(N, \mathbb{R}), \tag{6}$$

(où $N(w_M, \underline{0}, \pi_M)$ est l'opérateur d'entrelacement entre $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ et $\mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M))$ (P' le sous-groupe parabolique de Lévi $w_M(M(\mathbb{R}))$ contenant l'ensemble des matrices triangulaires supérieurs) normalisé par rapport au choix d'une fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M)$ et $\mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M)))$ définit une action de θ_N qui provient de la normalisation de Whittaker, c'est-à-dire elle est equivalent à l'action de θ_N introduit plus haut. Cette façon d'exprimer l'action de θ_N va nous permettre de montrer que, si pour $\rho_M = \tau_M^1 + \tau_M^2$, avec ρ_M, τ_M^1 et τ_M^2, θ_M-invariantes, on a,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_M}(\rho_M) = \mathrm{Tr}_{\theta_M}(\tau_M^1)$$

alors la trace tordue de l'induite $\mathrm{Ind}_M(\rho_M)$ satisfait l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\mathrm{Ind}_M(\rho_M)) = \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\mathrm{Ind}_M(\tau_M^1)).$$

Supposons maintenant qu'il existe pour chaque ψ_i, $i \in \{1, \cdots, r\}$ un ensemble de L-paramètres Φ_i de $GL(N_i)$, constitué par de L-paramètres φ_i tels que le module standard $I(\varphi_i)$ associé à φ_i est θ_{N_i}-invariant, de manière à ce que pour la trace tordue de chaque représentation Π_{ψ_i} on ait une décomposition,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(\Pi_{\psi_i}) = \sum_{\varphi_i \in \Phi_i} \epsilon_{\varphi_i} \mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(I(\varphi_i)) \tag{7}$$

où $\epsilon_{\varphi_i} \in \{0, 1\}$ et chaque trace tordue est défini par rapport à une action de θ_{N_i} normalisée avec un modèle de Whittaker de façon conforme a ce que à été fait plus haut. Alors ce qui a été dit plus haut sur l'action de θ_N nous permettra d'établir l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \epsilon_\varphi \mathrm{Tr}_{\theta_N}(I(\varphi)). \tag{8}$$

où $\Phi := \{\varphi = \otimes_{i=1}^r \varphi_i : \varphi_i \in \Phi_i\}$, $\epsilon(\varphi) = \Pi_{i=1}^r \epsilon(\varphi_i)$ et $I(\varphi)$ correspond au module standard associé à φ. Par conséquent en comparant **(8)** à **(4)** on peut grâce à ce qui a été dit après **(4)** de ramèner la preuve de **(5)** à montrer l'égalité $\Phi = \{\mathrm{St} \circ \varphi : \varphi \in \Phi_G\}$ et à prouver ensuite que le signe avec lequels les modules standards interviennent dans **(8)** est le même que celui avec le quel ils interviennent à droite de **(5)**.

Le probléme de décrire la trace tordue de Π_ψ, ψ un paramètre élémentaire, à l'aide de traces tordues de modules standard θ_N-invariants (égalité (**7**)) se résout facilement dans le cas de Π_ψ un caractère de $GL(N,\mathbb{R})$ ou dans le cas de Π_ψ l'induite d'un caractère de $GL(N-1)$ avec un caractère de $\mathbb{R}^*$ car dans ce cas, il n'y a pas de mystère sur ce qu'est le paquet d'Arthur, il est réduit à un élément, un caractère, que nous notons π_{ψ_G}. Par conséquent le paquet d'Adams-Johnson et le paquet d'Arthur associés à ψ_G sont egaux et du théorème **(2.2.1)** de **[Art13]** on peut conclure que $\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \mathrm{Tran}_G^{GL}(\mathrm{Tr}(\pi_\psi))$. L'égalité **(7)** s'obtient donc après du coté droite de **(3)** pour π_{ψ_G}.

Pour résoudre les cas restants, on s'appuie sur le calcul explicite de la trace de la combinaison linéaire Θ_{ψ_G} décrite par Adams et Johnson. Il nous faut un calcul de Π_ψ à l'aide de modules standards θ_N-invariants. Dans la situation d'un module de Speh basé sur une série discrète, les modules standards θ_N-invariants qui doivent apparaître sont tous des modules standards correspondant à l'un des sous-quotients irréductibles θ_N-invariants intervenant dans le modules standard avec Π_ψ comme unique sous module irréductible ; ces modules standard ont une longueur définie par Vogan et on transforme facilement cette notion de longueur en une notion de θ-longueur. On note X_i la somme des modules standards θ_N-invariants devant intervenir et de θ-longueur i. Chaque module standard considéré a une action de θ_N que l'on normalise avec un modèle de Whittaker comme plus haut. Ainsi chaque X_i a une action de θ_N, notée $A_i(\theta_N)$. Notons l_θ la θ-longueur du module standard avec Π_ψ comme unique sous module irréductible, on veut que,

$$\mathrm{Tr}(\Pi_\psi(f)A_{\theta_N}) = \sum_i (-1)^{l_\theta - i}\mathrm{Tr}(\pi_{X_i}(f)A_i(\theta_N)).$$

En fait on veut même mieux, on veut construire des morphismes de $X_i \to X_{i+1}$ pour tout i de façon à former un complexe,

$$0 \to \Pi_\psi \to X_{l_\theta} \to \cdots \to X_i \to X_{i-1} \to \cdots \to X_0 \to 0. \tag{9}$$

Ce complexe doit généraliser celui de Johnson dans le cas non tordu mais il n'est certainement pas exact. Il doit être θ-exact, c'est-à-dire que la trace tordue des noyaux modulo les images des flèches est nulle. Ce complexe n'est pas écrit en général dans la thèse même si une partie de la combinatoire l'est. On a réussi à mettre au point le cas de $GL(2n,\mathbb{R})$ jusqu'à $n = 4$; $n = 4$ n'est pas un blocage, les méthodes employées pourraient certainement donner aussi $n = 5$ mais il faudrait une idée supplémentaire pour traiter le cas général. De toute façon on a reussi à montrer que la combinatoire du complexe à des similitudes avec la combinatoire associé à la suite BGG (Voir **[BGG75]**, sections **10** et **11** et **[Hum08]** chapitre **6**). On montre que pour tout paire de modules standards θ_N-invariants $X(\gamma)$ et $X(\gamma')$ avec une différence de θ-longueur de 2 et $\overline{X(\gamma)} \in \mathrm{J.H}(X(\gamma'))$, $\overline{X(\gamma)}$ l'unique sous-module irréductible de $X(\gamma)$, on a un diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd} & X(\gamma') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X(\gamma_1) \arrow[dr] & & X(\gamma_2) \arrow[dl] \\ & X(\gamma) & \end{tikzcd} \tag{10}$$

où $X(\gamma_1)$ et $X(\gamma_2)$ sont les seuls modules standards θ_N-invariants entre $X(\gamma)$ et $X(\gamma')$. Par conséquent la construction du complexe **(9)** se ramène à choisir correctement les signes qui vont accompagner les flèches de **(10)**, la principale difficulté se trouve en montrer la θ-exactitude.

La conclusion de la thèse est donc que les paquets d'Arthur sont les paquets d'Adams-Johnson pour tout morphisme ψ_G, à caractère infinitésimal régulier et entier, tel que $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$ s'écrit sous la forme $\psi_1 \oplus \psi_2$, somme de deux morphismes avec Π_{ψ_1} un caractère de $GL(N_1, \mathbb{R})$ où l'induite d'un caractère de $GL(N_1 - 1, \mathbb{R})$ avec un caractère de $\mathbb{R}^*$ et ψ_2 de restriction à $SL(2, \mathbb{R})$ une somme de représentations irréductibles ayant toutes une dimension inférieure où égale à 4.

0.1 Plan de la Thèse

Chapitre 1. On rappelle dans un premièr chapitre la définition du groupe tordu $\widetilde{G}(N) = GL(N) \rtimes \theta_N$, le concept de représentation tordue et celle de trace tordue. On rappelle aussi la normalisation à la Whittaker de l'action de θ_N utilisée par Arthur.

Chapitre 2. Au chapitre deux, on introduit les paramètres d'Arthur correspondant aux représentations ayant un caractère infinitésimal entier et régulier (pour le groupe classique fixé), on donne la défininiition des paquets d'Adams-Johnson et pour les groupes classiques une description explicite des paramètres.

Chapitre 3. Le chapitre trois ouvre sur un résultat qui caractérise les sous-quotients de Π_ψ. Cette caractérisation va nous permettre de montrer que l'action définie par l'opérateur **(6)** provient de la normalisation de Whittaker, c'est-à-dire il est équivalent à l'action introduite au première chapitre. On montre finalement comme ramener le problème général au problème d'un morphisme élémentaire.

Chapitre 4. Dans la première partie du quatrième chapitre on montre l'equation **(7)** pour un paramètre ψ_G de $\mathbf{G}$ associé à un caractère de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. En suite on donne une paramétrisation de l'ensemble des modules standard intervenant dans la resolution de Π_ψ, pour Π_ψ la représentation de Speh basée sur une série discrète de $GL(2, \mathbb{R})$. L'etude des propriétés combinatoires de cette paramétrisation va nous permettre de construire le complexe différentiel θ-exact **(9)** pour le cas de $GL(2n, \mathbb{R})$ jusqu'à $n = 4$.

Chapitre 5. Au chapitre cinq on donne la preuve de l'égalité **(5)** après avoir supposé pour tout paramètre élémentaire la véracité de **(7)**. On peut finalement conclure que les paquets d'Adams-Jhonson sont des paquets d'Arthur.

Appendice A Au appendice A on montre pour tout paire de modules standards θ_N-invariants $X(\gamma)$ et $X(\gamma')$ (intervenant dans la resolution d'un module de Speh basé sur une série discrète) l'existence et commutativité du diagramme **(10)**.

Appendice B Au appendice B on montre le résultat suivant,

Lemme 0.1.1. *Soit $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ une collection ordonnée d'entiers, π une représentation irréductible de $GL(N, \mathbb{R})$ de caractère infinitésimal celui de l'induite des caractères $|\cdot|^{\alpha_i}$, $i \in [1, n]$ et $I(\pi)$ le module standard ayant π comme sous-module irréductible. Alors il existe* *des caractères quadratiques* ϵ_i *pour* $i \in [1, n]$ *et un morphisme surjectif de l'induite des caractères* $|\cdot|^{\alpha_i}\epsilon_i$ *sur* $I(\pi)$.

L'existence de ce morphisme est necessaire pour montrer que l'opérateur $N(w_M, 0, \cdot)$ de **(6)** a été normalisé correctement, comme on explique dans la preuve du lemme **(3.2.1)**.

Chapitre 1

Groupes Tordus

1.1 $GL(N)$-tordu

Un groupe tordu est la donnée d'un couple $(G, \widetilde{G})$ où G est un groupe réductif connexe défini sur un corps F et $\widetilde{G}$ une variété algébrique définie sur F munie de deux actions commutantes à droite et à gauche par G, pour chaque action, $\widetilde{G}$ est un espace principal homogène sous G.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie N. Notons par $G = GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires de V. On note $\widetilde{G}$ l'ensemble des formes bilinéaires non-dégénérées sur $V \times V$. Sur $\widetilde{G}$ on peut définir une action à gauche et à droite de la façon suivante, pour tout $g, g' \in G$ et $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$ on définit la forme bilinéaire $g\widetilde{x}g'$, par,

$$(v, v') \mapsto \widetilde{x}(g^{-1}v, g'v').$$

Ces actions font de $(G, \widetilde{G})$ un groupe tordu.

Considérons le groupe linéaire $GL(N)$. Soit θ_N l'automorphisme involutif de $GL(N)$ opérant par,

$$\theta_N(g) = J_N^{-1}({}^t g^{-1})J_N, \tag{1.1}$$

où J_N est la matrice antidiagonale,

$$J_N = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{N+1} & & & \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Le carré de θ_N est l'identité et on peut introduire le produit semi-direct,

$$GL(N)^+ = GL(N) \rtimes \langle \theta_N \rangle .$$

Munissons V d'une base $\{e_k\}_{k=1}^N$, on dispose alors d'un isomorphisme de groupes,

$$\iota : G \to GL(N, F).$$

Si en plus nous fixons un élément $\nu \in \mathbb{R}^\times$ et pour tout paire $1 \leq j < k \leq N$ nous notons par $\delta_{j,N+1-k}$ le symbole de Kronecker, alors l'élément $\widetilde{\theta}_N \in \widetilde{G}$ donné par,

$$\widetilde{\theta}_N(e_j, e_k) = \nu(-1)^j \delta_{j,N+1-k},$$

nous permet de définir un isomorphisme, $\widetilde{G} \to GL(N) \rtimes \theta_N$, donné pour tout $g \in G$ par,

$$g\widetilde{\theta_N} \mapsto \iota(g)\theta_N.$$

En d'autres termes le choix d'une base dans V nous fournit un isomorphisme,

$$\widetilde{G} \cong GL(N) \rtimes \theta_N.$$

Dans tout ce qui suit on ne travaillera qu'avec le groupe tordu, $\widetilde{G}(N) := GL(N) \rtimes \theta_N$ (Pour une description plus détaillée des groupes tordus voir **[LW13]** chapitre deux).

1.2 Représentations tordues

Considérons V un espace vectoriel. On appelle représentation tordue de $GL(N, \mathbb{R})$ dans V pour $GL(N) \rtimes \theta_N$, ou simplement représentation de $GL(N, \mathbb{R}) \rtimes \theta_N$, la donnée pour tout $\widetilde{x} \in GL(N, \mathbb{R}) \rtimes \theta_N$ d'un endomorphisme inversible,

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{x}) \in GL(V)$$

et d'une représentation π de $GL(N, \mathbb{R})$ dans V,

$$\pi : GL(N, \mathbb{R}) \to GL(V),$$

vérifiant pour tout $g, g' \in GL(N, \mathbb{R})$ et $\widetilde{x} = x \times \theta_N \in GL(N, \mathbb{R}) \rtimes \theta_N$, l'égalité,

$$\widetilde{\pi}(g\widetilde{x}g') = \pi(g)\widetilde{\pi}(\widetilde{x})\pi(g'). \tag{1.3}$$

En particulier,

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{x}g) = \widetilde{\pi}(\widetilde{x})\pi(g) = \widetilde{\pi}(x\theta_N(g)x^{-1}\widetilde{x}) = \pi(x\theta_N(g)x^{-1})\widetilde{\pi}(\widetilde{x})$$

et donc $\widetilde{\pi}(\widetilde{x})$ entrelace π avec $\pi^x \circ \theta_N$, où $\pi^x(g) = \pi(xgx^{-1}),\ g \in GL(N, \mathbb{R})$. La donnée de $\widetilde{\pi}$ détermine π. Réciproquement la représentation tordue $\widetilde{\pi}$ est déterminée par π et par le choix, pour un élément $\widetilde{x} = x \times \theta_N \in GL(N, \mathbb{R}) \rtimes \theta_N$, d'un opérateur A qui entrelace π et $\pi^x \circ \theta_N$. On peut reconstruire $\widetilde{\pi}$ en posant pour tout $g \in GL(N, \mathbb{R})$,

$$\widetilde{\pi}(g\widetilde{x}) = \pi(g)A. \tag{1.4}$$

On dit d'une représentation tordue $\widetilde{\pi}$ qu'elle est admissible si π l'est. On dit que $\widetilde{\pi}$ est unitaire s'il existe un produit hermitien défini positif sur V invariant par l'action de $\widetilde{\pi}$. Pour $\widetilde{\pi}$ unitaire et π irréductible, le lemme de Schur montre que π détermine $A = \widetilde{\pi}(\widetilde{x}),\ \widetilde{x} \in GL(N, \mathbb{R}) \rtimes \theta_N$, à un scalaire non nul près, indépendant de $\widetilde{x}$.

Deux représentations tordues $(\widetilde{\pi}_1, \pi_1, V_1)$ et $(\widetilde{\pi}_2, \pi_2, V_2)$ sont dites équivalentes s'il existe un opérateur d'entrelacement inversible,

$$I : V_1 \to V_2,$$

tel que pout tout $\widetilde{x} \in GL(N, \mathbb{R}) \rtimes \theta_N$ on ait,

$$I\widetilde{\pi}_1(\widetilde{x}) = \widetilde{\pi}_2(\widetilde{x})I.$$

Si on fixe $\widetilde{x} \in GL(N, \mathbb{R}) \rtimes \theta_N$ et on pose $A_1 = \widetilde{\pi}_1(\widetilde{x})$ et $A_2 = \widetilde{\pi}_2(\widetilde{x})$, pour tout $g \in GL(N, \mathbb{R})$ on aura l'égalité,

$$I\widetilde{\pi}_1(g\widetilde{x}) = \widetilde{\pi}_2(g\widetilde{x})I,$$

par conséquent,

$$I\pi_1(g)A_1 = \pi_2(g)A_2 I$$

et comme en particulier, $IA_1 = A_2 I$ avec A_1 inversible, on conclut,

$$I\pi_1(g) = \pi_2(g)I.$$

Les représentations π_1 et π_2 sont donc équivalentes. Mais la réciproque est fausse puisque même si, π est unitaire irréductible, la classe de π ne détermine A qu'à un scalaire non nul près.

Soit $\mathcal{H}$ le module de Hecke de $GL(N) \rtimes \theta_N$. Il est constitué par toutes les fonctions lisses à support compact dans $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$, K-finies à gauche et à droite par rapport à l'action sur $\widetilde{G}(\mathbb{R})$, K le sous-groupe compact maximal de $GL(N,\mathbb{R})$.

Definition 1.2.1. *Soit $(\widetilde{\pi}, \pi, V)$ une représentation unitaire irréductible de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$. Pour tout $f \in \mathcal{H}$ définissons l'opérateur,*

$$\widetilde{\pi}(f) = \int_{GL(N,\mathbb{R})\rtimes\theta_N} f(y)\widetilde{\pi}(y)\ dy = \int_{G(\mathbb{R})} f(x\theta_N)\pi(x)A_{\theta_N}\ dx.$$

avec $A_{\theta_N} := \widetilde{\pi}(\theta_N)$. La trace tordue de $(\widetilde{\pi}, \pi, V)$ est définie comme la distribution,

$$f \in \mathcal{H} \mapsto \mathrm{Tr}_{\theta_N}(f) = \mathrm{Tr}(\widetilde{\pi}(f)).$$

1.2.1 Extensions de représentations invariantes

Definition 1.2.2. *On dit d'une représentation (π, V) de $GL(N,\mathbb{R})$ qu'elle est θ_N-invariante si π est équivalente à $\pi^{\theta_N} := \pi \circ \theta_N$.*

Pour toute représentation admissible θ_N-invariante π, le choix d'un opérateur d'entrelacement A_π entre π et π^θ nous permet en définissant $\widetilde{\pi}(\theta_N) = A_\pi$, d'étendre π en une représentation $\widetilde{\pi}$ de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$. Si nous supposons π irréductible et unitaire, d'après le lemme de Schur l'opérateur A_π est unique à multiplication par un scalaire près et on peut en plus le choisir de manière à ce que $A_\pi^2 = \mathrm{Id}$. Par conséquent pour π on a deux extensions possibles à $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_N\rangle$, lesquelles diffèrent par un signe.

Dans ce qui suit, on va donner pour toute représentation admissible, irréductible et θ_N-invariante (π, V) de $GL(N,\mathbb{R})$ une extension canonique au groupe $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$, cette extension utilise la théorie des modèles de Whittaker. Pour cela on aura besoin des données suivantes ; Notons par B le sous-groupe de Borel de $GL(N)$, constitué par le sous-ensemble des matrices triangulaires inferiéures. Fixons un caractère additif non nul ψ de $\mathbb{R}$ et définissons sur le radical unipotent $U(\mathbb{R})$ de $B(\mathbb{R})$ le caractère χ donné pour tout $u = (u_{i,j}) \in U(\mathbb{R})$ par,

$$\chi(u) = \psi(u_{2,1} + \cdots + u_{n,n-1}). \tag{1.5}$$

La paire (B, χ) définit une donnée de Whittaker θ_N-invariante, c'est-à-dire, $\theta_N(B) = B$ et $\chi(\theta_N(u)) = \chi(u)$.

Pour commencer on suppose que π est une représentation irréductible, tempérée et θ_N-invariante de $GL(N,\mathbb{R})$. La représentation π admet une (B, χ)-fonctionnelle de Whittaker

ω, unique multiplication par un scalaire près (Voir **[Sha74]**). Par définition, ω est une forme linéaire non nulle sur l'espace V_∞ de vecteurs lisses pour π, telle que pour tout $n \in N_B(\mathbb{R})$, $v \in V_\infty$,

$$\omega(\pi(n)v) = \chi(n) \cdot \omega(v).$$

Soit A_π un opérateur non nul qui entrelace π et $\pi \circ \theta_N$. Comme la donnée (B, χ) est θ_N-invariante, pour tout $v \in V^\infty$, $n \in N_B(\mathbb{R})$ on a l'égalité,

$$\begin{aligned} \omega \circ A_\pi(\pi(n)v) &= \omega(\pi(\theta_N(n))A_\pi v) \\ &= \chi(n) \cdot \omega \circ A_\pi(v). \end{aligned}$$

Ceci fait de $\omega \circ A_\pi$ une (B, χ)-fonctionnelle de Whittaker pour π. Par conséquent il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que, $\omega \circ A_\pi = c \cdot \omega$. Notons, $\pi(\theta_N) := c^{-1}A$, c'est l'unique opérateur d'entrelacement entre π et $\pi \circ \theta_N$ tel que,

$$\omega = \omega \circ \pi(\theta_N). \tag{1.6}$$

Cette définition nous donne une extension unitaire de π à $GL(\mathbb{R}, N) \rtimes \langle \theta_N \rangle$, elle nous permet en particulier de définir une extension de π à $GL(\mathbb{R}, N) \rtimes \theta_N$ qui satisfait **(1.3)**.

Considérons maintenant au lieu de π, un module standard θ_N-invariant ρ de $GL(N, \mathbb{R})$. Le module standard ρ est l'induite d'une représentation $\pi_{M,\lambda}$ définie comme la torsion par un caractère réel positif, d'une représentation tempérée, irréductible d'un sous-groupe de Levi $M(\mathbb{R})$ de $GL(N, \mathbb{R})$. Il existe une partition de N, $(m_1, \cdots, m_k)$, de manière à ce que M puisse être identifié avec un sous-groupe des matrices diagonales par blocs,

$$\mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_k),$$

et $\pi_{M,\lambda}$ avec une représentation,

$$\pi_1|\det(\cdot)|^{\lambda_1} \otimes \pi_2|\det(\cdot)|^{\lambda_2} \cdots \otimes \pi_k|\det(\cdot)|^{\lambda_k},$$

où pour tout $i \in [1, k]$, π_i définit une représentation irréductible tempérée de $GL(m_i)$ et λ_i un réel tel que $\lambda_1 > \cdots > \lambda_i > \cdots > \lambda_k$. Par conséquent pour ρ on a l'égalité,

$$\rho = \mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda}),$$

où P est le sous-groupe parabolique des matrices triangulaires inférieurs associé à la partition de N, $(m_1, \cdots, m_k)$. La paire $(P, \pi_{M,\lambda})$ on l'appelle la donée de Langlands associé à ρ. Soit $\overline{\rho}$ l'unique sous module irréductible de ρ. Considérons la donée de Langlands $(\theta_N(P), \pi_{M,\lambda}^{\theta_N})$ associée au module standard $\mathrm{Ind}_{\theta_N(P)}(\pi_{M,\lambda}^{\theta_N})$. Il est facile de voir que l'opérateur défini pour tout $f \in \mathrm{Ind}_{MN}(\pi_{M,\lambda})$, $g \in GL(N, \mathbb{R})$ par,

$$\vartheta(f)(g) = f(\theta_N(g)),$$

est un isomorphisme qui entrelace ρ^{θ_N} et $\mathrm{Ind}_{\theta_N(P)}(\pi_{M,\lambda}^{\theta_N})$. Comme par hypothèse ρ est θ_N-invariant, c'est-à-dire $\rho \cong \rho^{\theta_N} \cong \mathrm{Ind}_{\theta_N(P)}(\pi_{M,\lambda}^{\theta_N})$, on obtient que $\overline{\rho} \cong \overline{\rho}^{\theta_N} \cong \overline{\mathrm{Ind}_{\theta_N(P)}(\pi_{M,\lambda}^{\theta_N})}$. La donnée $(P, \pi_{M,\lambda})$ est donc conjuguée à $(\theta_N(P), \pi_{M,\lambda}^{\theta_N})$ et on conclut que $\theta_N(P) = P$, $\theta_N(M) = M$ et donc,

$$\begin{aligned} \pi_i^{\theta_{m_i}} &\cong \pi_{k+1-i}, \\ -\lambda_i &= \lambda_{k+1-i}. \end{aligned}$$

En particulier, M est θ_N-invariante et $\pi_{M,\lambda}$ isomorphe à $\pi_{M,\lambda}^{\theta_N}$. On peut donc, grâce à ce qui a été dit dans le cas tempéré, d'étendre $\pi_{M,\lambda}$ en une représentation, $\widetilde{\pi}_{M,\lambda}$, du produit semi-direct,

$$M(\mathbb{R}) \rtimes \langle \theta_N \rangle \,.$$

Voyons un peut plus en détail comme $\widetilde{\pi}_{M,\lambda}$ est défini. Si k est impair, alors $\pi_{k+1/2} \cong \pi_{k+1/2}^{\theta_{m_{k+1/2}}}$ et $\lambda_{k+1/2} = 0$, $\pi_{k+1/2}$ est donc tempérée et on peut comme plus haut choisir un opérateur $B_{k+1/2}$ qui entrelace $\pi_{k+1/2}$ et $\pi_{k+1/2}^{\theta_{m_{k+1/2}}}$ de manière d'avoir **(1.6)** pour une fonctionnelle de Whittaker de $\pi_{k+1/2}$. Pour les autres facteurs, fixons des opérateurs d'entrelacement inversibles, B_i, entre π_{k+1-i} et $\pi_i^{\theta_{m_i}}$, pour tout $1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$.

L'opérateur,

$$A_{\pi_{M,\lambda}} : \pi_1|\cdot|^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \pi_k|\cdot|^{\lambda_k} \to \pi_k^{\theta_{m_k}}|\cdot|^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \pi_1^{\theta_{m_1}}|\cdot|^{\lambda_k} \cong \pi_M^{\theta_N},$$

défini par le produit,

$$A_{\pi_{M,\lambda}} := \begin{cases} B_1^{-1} \otimes B_2^{-1} \cdots \otimes B_{k/2}^{-1} \otimes B_{k/2} \cdots \otimes B_2 \otimes B_1 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ B_1^{-1} \otimes B_2^{-1} \cdots \otimes B_{\lfloor k/2 \rfloor}^{-1} \otimes B_{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \otimes B_{\lfloor k/2 \rfloor} \cdots \otimes B_2 \otimes B_1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

est donc un isomorphisme qui entrelace $\pi_{M,\lambda}$ et $\pi_{M,\lambda}^{\theta_N}$. Si maintenant pour tout $i \in [1,k]$ on prend une fonctionnelle de Whittaker ω_i de π_i, comme,

$$\omega_{k+1-i} \circ B_i = c_i \omega_i, \quad c_i \in \mathbb{C}^*$$

où $c_i = 1$ si k est impaire et $i = k + 1/2$, pour $\omega = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_r$ on obtient,

$$\begin{aligned} \omega \circ A_{\pi_{M,\lambda}} &= \omega_1 \circ B_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k \circ B_k \\ &= c_1 \omega_1 \otimes \cdots \otimes c_1^{-1} \omega_k \\ &= \omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Finalement, pour définir $\widetilde{\pi}_{M,\lambda}$ on prend simplement, $\widetilde{\pi}_{M,\lambda}(\theta_N) = A_{\pi_{M,\lambda}}$.

Le produit semidirect, $P \rtimes \langle \theta_N \rangle$, définit un sous-groupe parabolique de $GL(N) \rtimes \langle \theta_N \rangle$ et le pullback de $M(\mathbb{R}) \rtimes \langle \theta_N \rangle$ à $P(\mathbb{R}) \rtimes \langle \theta_N \rangle$ de la représentation $\widetilde{\pi}_{M,\lambda}$ peut être induite à $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle \theta_N \rangle$. Ce qui nous donne une extension $\widetilde{\rho}$ de ρ à $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle \theta_N \rangle$ et en particulier une représentation de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$. L'action de θ_N sur l'espace $\mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})$ est en conséquence défini par l'opérateur,

$$A_{\theta_N} f(g) = A_{\pi_{M,\lambda}}(f(\theta_N(g))), \quad f \in \mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda}),\ g \in GL(N,\mathbb{R}). \tag{1.8}$$

Soit finalement π une représentation admissible, irréductible et θ_N-invariante de $GL(N,\mathbb{R})$. Alors π est l'unique sous module irréductible d'un module standard $\rho = \mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})$ uniquement déterminé. Par la correspondance bijective entre représentations irréductibles et standards on peut conclure que ρ est aussi θ_N-invariant. L'extension $\widetilde{\rho}$ de ρ à $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle \theta_N \rangle$ nous donne donc une extension canonique $\widetilde{\pi}$ de π à $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle \theta_N \rangle$ et en particulier une représentation de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$. En effet, comme $\rho \cong \rho^{\theta_N}$ on obtient $\pi \cong \pi^{\theta_N} \cong \overline{\mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda}^{\theta_N})}$ et la restriction de A_{θ_N} à π définit donc un opérateur qui entrelace π et $\pi \circ \theta_N$.

Pour finir, on montrera que A_{θ_N} preserve une fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_M(\pi_{M,\lambda})$. Pour cela, il nous faut d'abord rappeler la construction de la fonctionnelle de Whittaker pour un module standard basé sur une représentation générique (Pour une description plus détaillée voir **[Sha10]** chapitre 3 section 6 ou **[Art13]** chapitre 2 section 5 d'où cette section est en grande partie inspirée).

Soit donc π_M une représentation tempérée, irréductible d'un sous-groupe de Levi $M(\mathbb{R})$ de $GL(N, \mathbb{R})$ avec ω comme $(B \cap M, \chi)$-fonctionnelle de Whittaker. Pour tout point $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ considérons la représentation induite $\mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})$ où $\pi_{M,\lambda}$ correspond à la torsion par λ de π_M et P au sous-groupe parabolique de $GL(N, \mathbb{R})$ de Levi $M(\mathbb{R})$ contenant le sous-groupe de matrices triangulaires inférieurs. On réalise l'espace de la représentation induite $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ comme un espace de Hilbert $\mathcal{H}_P(\pi_M)$ de fonctions sur le sous-groupe compact maximal K, cet espace restant le même lorsque π_M est remplacée par $\pi_{M,\lambda}$ (câest lâaction de $GL(N, \mathbb{R})$ qui change). Si $f \in \mathcal{H}_P(\pi_M)$, il faut poser

$$f_{\pi_M,\lambda}(x) = \pi_M(M_P(x)) \cdot f(K_P(x)) e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(x))}, \quad x \in GL(N, \mathbb{R}), \tag{1.9}$$

avec les notations de **[Art89a]**, p.26, pour obtenir un vecteur dans l'espace usuel de $\mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})$. Pour tout $f \in \mathcal{H}_{P,\infty}(\pi_M)$ définissons l'intégrale de Whittaker,

$$W(f, \pi_M, \lambda) = \int_{N_*} \omega(f_{\pi_M,\lambda}(w_*^{-1} n_*)) \chi^{-1}(n_*) dn_*, \tag{1.10}$$

avec N_* le radical unipotent du sous-groupe parabolique standard $P_* = M_* N_*$ de Levi,

$$M_* = w_* M w_*^{-1}, \qquad \omega_* = w_l w_l^M,$$

où w_l et w_l^M sont les éléments de longueur maximale dans le group de Weyl de $GL(N)$ et M respectivement. L'intégrale de Whittaker **(1.10)** converge absolutement dans une certaine chambre de $\mathrm{Re}(\lambda)$ et peut être étendue analytiquement comme une fonction, noté aussi $W(f, \pi_M, \lambda)$, entière de λ (Voir **[Sha10]** Lemme **(3.6.8)** et Corollaire **(3.6.11)**). Finalement notre (B, χ)-fonctionnelle de Whittaker $\Omega(\pi_{M,\lambda})$ de $\mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})$ est définie pour tout $f \in \mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})_\infty$ par,

$$\Omega(\pi_{M,\lambda})(f) = W(f, \pi_M, \lambda). \tag{1.11}$$

La fonctionnelle $\Omega(\pi_{M,\lambda})$ est unique multiplication par un scalaire près (Voir théorème **(2.2)** de **[Has79]** ou théorème **(1.1)** de **[Sha80]**).

Supposons maintenant que π_M définit un module standard de $M(\mathbb{R})$ basé sur une représentation tempérée et irréductible, $\sigma_{M'}$, d'un sous-groupe de Levi $M'(\mathbb{R})$ de $M(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, $\pi_M = \mathrm{Ind}_{P_M}^M(\sigma_{M'})$, avec P_M un sous-groupe parabolique de $M(\mathbb{R})$ de Levi $M'(\mathbb{R})$. Notons par $\Omega_M(\sigma)$ la fonctionnelle de Whittaker de π_M définie par **(1.11)** à partir d'une fonctionnelle de Whittaker $\omega_{M'}$ de $\sigma_{M'}$ comme plus haut. Formons la représentation $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ de $GL(N, \mathbb{R})$, P un sous-groupe parabolique de Levi $M(\mathbb{R})$ de $GL(N, \mathbb{R})$. Il est alors facile de voir de la construction de la fonctionnelle de Whittaker pour des représentations induites que la fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, définie à partir de $\Omega_M(\sigma_{M'})$ par **(1.10)** la où l'integrale converge et étendue analytiquement pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, est égal à la fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda})$, définie par **(1.11)** à partir de la fonctionnelle de Whittaker $\omega_{M'}$ de $\sigma_{M'}$.

Finalement soit π_M une représentation irréductible, tempérée, θ_N-invariante de $M(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ l'induite associée. Comme le caractère χ est θ_N-invariant, alors **(1.7)** et un changement de variable nous donne, là où **(1.10)** converge, l'égalité,

$$\begin{aligned}
\Omega(\pi_{M,\lambda})(A_{\theta_N} f) &= \int_{N_*} \omega((A_{\pi_M} f)(\theta_N(w_*^{-1})\theta_N(n_*)))\chi^{-1}(n_*)dn_* && (1.12)\\
&= \int_{N_*} \omega(f(\theta_N(w_*^{-1})\theta_N(n_*)))\chi^{-1}(n_*)dn_* && (1.13)\\
&= \int_{\theta_N(N_*)} \omega(f(\theta_N(w_*)^{-1}m_*))\chi^{-1}(\theta_N(m_*))dm_* && (1.14)\\
&= \Omega(\pi_{M,\lambda})(f). && (1.15)
\end{aligned}$$

Finalement de l'unicité de l'extension analytique on obtient,

$$\Omega(\pi_M) \circ A_{\theta_N} = \Omega(\pi_M). \tag{1.16}$$

Chapitre 2

Paquets d'Arthur vs Paquets d'Adams-Johnson

2.1 Paquets d'Arthur locaux

Soit $\mathbf{G}$ un groupe classique défini sur le corps des réels, quasi-deployé, c'est-à-dire $\mathbf{Sp}(2n)$ ou $\mathbf{SO}(p,q)$ avec $p-q=0,1$ ou 2. Notons par $\widehat{\mathbf{G}}$ son groupe dual et par ${}^LG$ le L-groupe,

$${}^LG = \widehat{\mathbf{G}} \rtimes W_{\mathbb{R}}.$$

où $W_{\mathbb{R}}$ est le groupe de Weil de $\mathbb{R}$, qui est défini comme une extension de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire,

$$W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* \cup j\mathbb{C}^*,$$

où, $j^2=-1$ et $jzj^{-1}=\bar{z}, z\in\mathbb{C}^*$.

Pour le L-groupe ${}^LG$ on a les égalités ;

i.) Si $\mathbf{G}=\mathbf{Sp}(2n)$ alors $\mathbf{G}$ est déployé, $\widehat{\mathbf{G}}=\mathbf{SO}(2n+1,\mathbb{C})$ et ${}^LG=\mathbf{SO}(2n+1,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$.

ii.) Si $\mathbf{G}=\mathbf{SO}(p,q),\ p-q=1$ alors $\mathbf{G}$ est déployé, $\widehat{\mathbf{G}}=\mathbf{Sp}(p+q-1,\mathbb{C})$ et ${}^LG=\mathbf{Sp}(p+q-1,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}^LG$.

iii.) Si $\mathbf{G}=\mathbf{SO}(p,q),\ p-q=0$ alors $\widehat{\mathbf{G}}=\mathbf{SO}(p+q,\mathbb{C})$. Pour $p-q=0$ le groupe $\mathbf{G}$ est déployé et ${}^LG=\mathbf{SO}(p+q,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}}$. Par contre si $p-q=2$, $\mathbf{G}$ est quasi-déployé et le L-groupe est un produit semi-direct non-trivial ${}^LG=\mathbf{SO}(p+q,\mathbb{C})\rtimes W_{\mathbb{R}}$, où le groupe de Galois agit par un automorphisme exterieur sur $\mathbf{SO}(p+q,\mathbb{C})$, automorphisme exterieur doné par l'action d'un elément de $\mathbf{O}(p+q,\mathbb{C})$.

2.1.1 Paramètres de Langlands

Definition 2.1.1. *Un paramètre de Langlands pour* $\mathbf{G}$ *est la* $\widehat{\mathbf{G}}$*-classe de conjugaison d'un homomorphisme de groupes* $\varphi_G : W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$ *tel que,*
i.) φ_G *définit un homomorphisme continu.*

ii.) Le diagramme,

$$\begin{tikzcd} W_{\mathbb{R}} \arrow[rr, "\varphi_G"] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_{\mathbb{R}} & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

iii.) Les éléments dans la projection de $\varphi_G(\mathbb{C}^*)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$ sont semi-simples.

iv.) Le plus petit sous-groupe de Levi de ${}^L G$ contenant $\varphi(W_{\mathbb{R}})$ est le sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique relevant de ${}^L G$.

On note par $\Phi(\mathbf{G})$ l'ensemble de L-paramètres de $\mathbf{G}$. Associée à $\Phi(\mathbf{G})$ on a la famille $\Pi(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ des classes d'equivalence infinitésimal des représentation irréductibles et admissibles de $G(\mathbb{R})$.

2.1.2 Paramètres d'Arthur

Definition 2.1.2. *Un paramètre d'Arthur pour $\mathbf{G}$ est défini comme une classe de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison d'homomorphismes,*

$$\psi_G : W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C}) \ \rightarrow \ {}^L G,$$

tel que,

i.) Le diagramme,

$$\begin{tikzcd} W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C}) \arrow[rr, "\psi_G"] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_{\mathbb{R}} & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

ii.)La restriction $\psi_G|_{SL(2,\mathbb{C})}$ est holomorphe.

iii.)La restriction $\psi_G|_{W_{\mathbb{R}}}$ définit un homomorphisme admissible avec image, Im$(\psi_G|_{W_{\mathbb{R}}})$, borné.

On note $\Psi(\mathbf{G})$ l'ensemble des paramètres d'Arthur. À chaque $\psi_G \in \Psi(\mathbf{G})$ on peut en suivant Arthur associer un paramètre de Langlands φ_{ψ_G} donné par,

$$\varphi_{\psi_G}(w) = \psi_G\left(w, \begin{pmatrix} |w|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right), \tag{2.1}$$

où $|\cdot| : W_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'homomorphisme norme qui envoie j sur 1 et $z \in \mathbb{C}^*$ sur $z\bar{z}$. L'application $\psi_G \rightarrow \varphi_{\psi_G}$ définit une injection entre $\Psi(\mathbf{G})$ et $\Phi(\mathbf{G})$. Soit N égal à $p+q-1$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=1$, égal à $p+q$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 0,2$ ou égal à $2n+1$ si

$\mathbf{G} = Sp(2n)$. Dans le chapitre précédent on a défini le groupe tordu, $\widetilde{G}(N) := GL(N) \rtimes \theta_N$, où θ_N correspond à l'automorphisme involutif de $GL(N)$, opérant par,

$$\theta_N(g) = J_N^{-1}({}^t g^{-1}) J_N,$$

avec, J_N, la matrice antidiagonale,

$$J_N = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ (-1)^{N+1} & & & \end{pmatrix}.$$

Considérons pour le groupe $GL(N)$, l'ensemble $\Psi(N)$ des classes d'equivalence de représentations, auto-duales et de dimension N du produit $W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C})$ et l'ensemble $\Phi(N)$ des classes d'equivalence de représentations, auto-duales et de dimension N de $W_{\mathbb{R}}$.

Pour chacun de groupes classiques, on dispose d'un représentation naturelle du L-groupe dans un $GL(N,\mathbb{C})$,

$$\mathrm{St}: \ {}^L G \to GL(N,\mathbb{C}). \tag{2.2}$$

Dans le cas de $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n)$, elle est donnée l'inclusion de $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbf{C})$ dans $GL(2n+1,\mathbb{C})$, dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 1$, de l'inclusion de $\mathbf{Sp}(p+q-1,\mathbb{C})$ dans $GL(p+q-1,\mathbb{C})$, dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 0$, de l'inclusion de $\mathbf{SO}(p+q, \mathbf{C})$ dans $GL(p+q,\mathbb{C})$. Le cas $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 2$, est plus délicat car comme on a dit plus haut le groupe étant non déployé le L-groupe est un produit semi-direct non trivial $\mathbf{SO}(p+q,\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}}$. Mais l'action de $W_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbf{SO}(p+q, \mathbf{C})$ est donée par l'action d'un elément de $\mathbf{O}(p+q,\mathbb{C})$, de sorte que l'on a un morphisme

$$\mathbf{SO}(p+q,\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}} \to \mathbf{O}(p+q,\mathbb{C}),$$

et la composition avec l'inclusion de $\mathbf{O}(p+q,\mathbb{C})$ dans $GL(p+q,\mathbb{C})$ nous donne la représentations voulue.

L'inclusion $\mathrm{St}: \ {}^L G \to GL(N,\mathbb{C})$ nous donne donc une application injective entre $\Psi(\mathbf{G})$ et $\Psi(N)$, à chaque $\psi_G \in \Psi_G$ on associe $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$. En même temp pour tout $\psi \in \Psi(N)$ l'application, $\psi \to \varphi_\psi,\ \varphi_\psi$, définie comme dans **(2.1)**, nous donne comme pour $\mathbf{G}$, une injection entre les ensembles $\Psi(N)$ et $\Phi(N)$. Finalement si on restreint la correspondance de Langlands à l'ensemble des représentations auto-duales de $W_{\mathbb{R}}$, on obtient une bijection entre l'ensemble des paramètres $\Phi(N)$ et l'ensemble $\Pi(N)$ des classes d'equivalence de représentations auto-duales irréductibles de $GL(N,\mathbb{R})$. La composition,

$$\Psi(\mathbf{G}) \hookrightarrow \Psi(N) \hookrightarrow \Phi(N) \xrightarrow{\cong} \Pi(N)$$

nous donne donc une injection,

$$\psi_G \to \Pi_\psi,\ \psi := \mathrm{St} \circ \psi_G,$$

de $\Psi(\mathbf{G})$ dans $\Pi(N)$. La représentation $\Pi_\psi, \psi = \mathrm{St} \circ \psi_G,\ \psi_G \in \Psi(\mathbf{G})$ est donc θ_N-invariante et on peut étendre Π_ψ en une représentation du produit semi-direct $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta\rangle$ et par conséquent définir comme dans le chapitre précédent une extension $\widetilde{\Pi}_\psi$ de Π_ψ à $\widetilde{G}(N,\mathbb{R})$.

2.1.3 Facteur de transfert et paquets d'Arthur

Un élément $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{R})$ est dit fortement régulier si le centralisateur,

$$G_\gamma = \mathrm{Cent}(\gamma, \mathbf{G})$$

est un tore maximal de $\mathbf{G}$. Associé à tout élément γ fortement régulier on a l'intégrale orbitale invariante de $f \in \mathcal{H}(G)$ (le module de Hecke de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$) définie par,

$$f_G(\gamma) = |D(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int_{G_\gamma(\mathbb{R})\backslash \mathbf{G}(\mathbb{R})} f(x^{-1}\gamma x)dx$$

où $D(\gamma)$ est le discriminant de Weyl.

On dit que deux éléments fortement réguliers γ et γ' sont stablement conjugués s'ils sont conjugués par un élément de $\mathbf{G}(\mathbb{C})$. On peut montrer que le nombre de classes de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$-conjugaison dans n'importe quelle classe de conjugaison stable est fini. La somme des intégrales orbitales associées aux classes de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$-conjugaison γ dans la classe de conjugaison stable δ,

$$f^G(\delta) = \sum_\gamma f_G(\gamma), \quad f \in \mathcal{H}(G),$$

s'appelle l'intégrale orbitale stable de f en δ. Ecrivons,

$$\mathcal{S}(G) = \{f^G : f \in \mathcal{H}(G)\}, \tag{2.3}$$

pour l'espace des fonctions sur les classes de conjugaison stable δ obtenues de cette manière. On dit d'une distribution sur $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ (plus correctement, une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(G)$) qu'elle est stable, si elle est contenue dans la clôture de l'espace vectoriel engendré par les intégrales orbitales stables.

Dans **[KS99]** Kottwitz et Shelstad ont étendu les résultats de **[LS87]** au cas de groupes endoscopiques tordus. On définit comme dans **[KS99]** section **(3.3)** la notion d'élément fortement régulier $\widetilde{\gamma}$ de $\widetilde{G}(N,\mathbb{R})$ et pour tout $f \in \mathcal{H}(N)$ (le module de Hecke de $\widetilde{G}(N,\mathbb{R})$) l'intégrale orbitale tordue $f_{\widetilde{G}(N)}$ de $\widetilde{\gamma}$ par,

$$f_{\widetilde{G}(N)}(\widetilde{\gamma}) = |D(\widetilde{\gamma})|^{\frac{1}{2}} \int_{\widetilde{G}_{\widetilde{\gamma}}(N,\mathbb{R})\backslash GL(N,\mathbb{R})} f(x^{-1}\widetilde{\gamma}x)dx,$$

où,

$$\widetilde{G}_{\widetilde{\gamma}}(N) = \mathrm{Cent}(\widetilde{\gamma}, GL(N)).$$

Kottwitz et Shelstad en suivant **[LS87]** définissent dans **[KS99]** une fonction $\Delta(\delta,\widetilde{\gamma})$ entre une classe $\widetilde{G}(N)$-fortement régulier stablement conjuguée $\delta \in G(\mathbb{R})$ et une classe de conjugaison tordue fortement régulier $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{G}(N,\mathbb{R})$ (pour les définitions, voir **[KS99]** section **(3.3)**), ils appellent cette fonction le facteur de transfert tordu. Le facteur de transfert sert à définir la fonction de tranfert qui à tout $f \in \mathcal{H}(N)$ associe la fonction,

$$f^G(\delta) = \sum_{\widetilde{\gamma}} \Delta(\delta,\widetilde{\gamma}) f_N(\widetilde{\gamma}),$$

d'une classe $\widetilde{G}(N)$-fortement régulier stablement conjuguée δ. Kottwitz et Shelstad ont conjecturé que cette fonction appartient à $\mathcal{S}(G)$. Récemment Shelstad **[She12]** a montré la veracité de la conjecture dans le cas archimédien.

Pour tout $f \in \mathcal{H}(N)$ notons donc par f^G la fonction dans $\mathcal{S}(G)$ associée. Le résultat suivant s'obtient du théorème **(2.2.1)** du livre **[Art13]** de James Arthur,

Théorème 2.1.1. *Pour $\psi_G \in \Psi(\mathbf{G})$ soit $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$. Alors il existe un ensemble fini $\Pi(\psi_G)$ de représentations de $G(\mathbb{R})$ tel que,*

$$\mathrm{Tr}(\Pi_\psi(f) A_{\theta_N}) = \sum_{\pi \in \Pi(\psi_G)} \varepsilon(\pi) m(\pi) \mathrm{Tr}(\pi(f^G)), \qquad f \in \mathcal{H}(N).$$

où $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$ et $m(\pi)$ est un entier positif. L'ensemble $\Pi(\psi_G)$ associé à ψ_G est appellé le paquet d'Arthur de ψ_G.

2.2 Paquets d'Adams-Johnson

L'exposition qui suit est en grande partie inspirée de **[Tai]**, **(4.2.2)** et de **[Art89b]**, section **(5)**.

Pour $\mathbf{G}$ un groupe classique, considérons une paire $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ où $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{G}$ avec $\mathbf{T}(\mathbb{R})$ maximalement compact et $\mathbf{B}$ un groupe de Borel de $\mathbf{G}_\mathbb{C}$ contenant $\mathbf{T}_\mathbb{C}$. Soit $(\mathcal{B}, \mathcal{T}, \Delta)$ un scindage de $\widehat{\mathbf{G}}$, on a un isomorphisme $\widehat{\mathbf{T}} \cong \mathcal{T}$.

Fixons $\psi_G \in \Psi(\mathbf{G})$. Notons par $\mathcal{L}$ le centralisateur de $\psi_G(\mathbb{C}^*)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$. Comme $\mathbb{C}^*$ est commutatif,

$$\psi_G(\mathbb{C}^* \times SL(2, \mathbb{C})) \subset \mathcal{L}.$$

Considérons les deux propriétés suivantes pour un élément $\psi_G \in \Psi(\mathbf{G})$,
i. La restriction de ψ_G à $\mathbb{R}_{>0}$ est triviale.
ii. $\psi_G(SL(2, \mathbb{C}))$ contient un élément régulier unipotent de $\mathcal{L}$.

Definition 2.2.1. *On note par $\Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ l'ensemble des paramètres $\psi_G \in \Psi(\mathbf{G})$ qui satisfont* ***i.)*** *et* ***ii.)****.*

On donne maintenant une description de tout paramètre $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$. D'après **i.)** il existe (après conjugaison par un élément de $\widehat{\mathbf{G}}$) $\mu_0 \in \frac{1}{2} X_*(\mathcal{T})$ de manière à ce que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on ait, $\psi_G(z) = 2\mu_0(z/|z|)$. De plus l'ensemble des racines $\alpha \in R(\mathcal{T}, \widehat{G})$ telles que $\langle \alpha, \mu_0 \rangle \geq 0$ définit un sous-groupe parabolique $\mathcal{Q}$ de $\widehat{G}$ de facteur de Levi égal à $\mathcal{L}$. Par la propriété **ii.)** on peut, à conjugaison près, supposer,

$$d(\psi_G|_{SL(2,\mathbb{C})}) \left(- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathcal{L})} X_\alpha.$$

Soit $n : W(\widehat{\mathbf{G}}, \mathcal{T}) \rtimes W_\mathbb{R} \to N(\widehat{\mathbf{G}}, \mathcal{T}) \rtimes W_\mathbb{R}$ l'application définie dans **[LS87]** section **(2.1)**. Soit w_0, respectivement w_1, l'élément de longueur maximal de $W(\widehat{\mathbf{G}}, \mathcal{T})$, respectivement $W(\mathcal{L}, \mathcal{T})$. Notons $n_\mathcal{Q} \rtimes j = n(w_1 w_0 \rtimes j)$, alors $n_\mathcal{Q} \rtimes j$ préserve $\Delta(\mathcal{L})$ et agit par $t \to t^{-1}$ sur $Z(\mathcal{L})$. Par la proposition **(9.3.5)** de **[Spr98]**, $n_\mathcal{Q} \rtimes j$ préserve $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathcal{L})}$, il commute donc avec $\psi_G(SL(2, \mathbb{C}))$ et comme pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a,

$$\psi_G(z^{-1}) = (n_\mathcal{Q} \rtimes j) \psi_G(z) (n_\mathcal{Q} \rtimes j)^{-1} = \psi_G(j) \psi_G(z) \psi_G(j)^{-1},$$

l'élément $\psi_G(j)(n_\mathcal{Q} \rtimes j)^{-1}$ commute avec $\psi_G(\mathbb{C}^*)$ et appartient donc à $\mathcal{L}$. Comme en plus il commute avec $\psi_G(SL(2, \mathbb{C}))$ on conclut que $\psi_G(j)(n_\mathcal{Q} \rtimes j)^{-1} \in Z(\mathcal{L})$. Soit $t \in Z(\mathcal{L})$ tel que $\psi_G(j) = t \cdot (n_\mathcal{Q} \rtimes j)$, alors, $\psi_G(j)^2 = t \cdot ((n_\mathcal{Q} \times j) \cdot t)(n_\mathcal{Q} \times j) = (tt^{-1})(n_\mathcal{Q} \times j)^2$ et pour $2\mu_0(-1)$ on obtient l'égalité,

$$2\mu_0(-1) = \psi_G(-1) = \psi_G(j)^2 = (n_\mathcal{Q} \rtimes j)^2$$

Comme en plus par le lemme **(2.1.A)** de **[LS87]** on a, $(n_{\mathcal{Q}} \rtimes j)^2 = \Pi_{\alpha \in R_{\mathcal{Q}}} \alpha^\vee(-1)$, avec $R_{\mathcal{Q}}$ l'ensemble des racines du radical unipotent $\mathcal{U}$ de $\mathcal{Q}$, on peut grâce à la proposition **(1.3.5)** de **[She81]** conclure,

$$\mu_0 \in X_*(Z(\mathcal{L})^0) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_{\mathcal{Q}}} \alpha^\vee. \tag{2.4}$$

Soit φ_{ψ_G} le paramètre de Langlands associé à ψ_G. Définissons,

$$\mu = \mu_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_{\mathcal{B} \cap \mathcal{L}}} \alpha^\vee \quad \text{et} \quad \mu' = \mu_0 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_{\mathcal{B} \cap \mathcal{L}}} \alpha^\vee \tag{2.5}$$

Alors $\mu \in X_*(\mathcal{T}) + \sum_{\alpha \in R_B} \alpha^\vee$ et on peut pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ écrire,

$$\begin{aligned} \varphi_{\psi_G}(z) &= \mu(z)\mu'(\bar{z}), \\ &= (\mu + \mu')(|z|)(\mu - \mu')(z/|z|). \end{aligned}$$

On appelle caractère infinitésimal de ψ_G, l'orbite du caractère μ sous l'action du groupe de Weyl. On suppose dans ce qui suit que le caractère infinitésimal μ de ψ_G est regulier.

Dans **[AJ87]** J.Adams et J.Johnson ont associé à notre paramètre $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(G)$ un ensemble fini $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ de représentations irréductibles et unitaires de $G(\mathbb{R})$. On appelle l'ensemble $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ paquet d'Adams-Jonhson de ψ_G. Passons maintenant à sa description.

A la paire $(\mathcal{Q}, \mathcal{L})$ on peut associer un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q} \supset \mathbf{B}$ de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ et un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}_{\mathbb{C}} \supset \mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ de $\mathbf{Q}$. Considérons l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ des classes de conjugaison (sous $\mathbf{G}(\mathbb{R})$) de paires $(\mathbf{Q}, \mathbf{L})$ où $\mathbf{Q} \supset \mathbf{B}$ définit un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ avec $\widehat{\mathbf{Q}} \cong \mathcal{Q}$ et $\mathbf{L}$ un sous-groupe réel de $\mathbf{G}$ avec $\mathbf{L}_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{Q}$. Si nous fixons un paire $(\mathbf{Q}, \mathbf{L})$ l'application $g \in N(\mathbf{G}(\mathbb{C}), \mathbf{T}(\mathbb{C})) \mapsto (g\mathbf{Q}g^{-1}, g\mathbf{T}g^{-1})$ nous permet d'identifier l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{Q}}$ à

$$S = W(\mathbf{L}, \mathbf{T}) \setminus W(\mathbf{G}, \mathbf{T})/W(G, T).$$

où $W(G,T)$ correspond au groupe de Weyl réel de $\mathbf{G}$.

Pour toute classe $\mathrm{cl}(\mathbf{Q}, \mathbf{L})$ il existe un isomorphisme $\widehat{\mathbf{L}} \cong \mathcal{L}$. Soit $(\mathbf{Q}', \mathbf{L}')$ une autre classe dans $\Sigma_{\mathcal{Q}}$, il existe un unique élément dans $\mathbf{G}(\mathbb{C})/\mathbf{L}(\mathbb{C})$ qui conjugue $(\mathbf{Q}, \mathbf{L})$ avec $(\mathbf{Q}', \mathbf{L}')$ et qui nous donne un isomorphisme ${}^L L \cong {}^L L'$. On veut définir une inclusion,

$$\iota_{G,L} : {}^L L \to {}^L G \tag{2.6}$$

qui étend $\widehat{L} \cong \mathcal{L}$. Pour cela on définit,

$$\begin{aligned} &\iota_{G,L}(z) = \Pi_{\alpha \in R_{\mathcal{Q}}} \alpha^\vee(z/|z|) \rtimes z, \quad z \in \mathbb{C}^*, \\ &\iota_{G,L}(j) = n_{\mathcal{Q}} \rtimes j. \end{aligned}$$

La caracterisation qui à été faite pour le paramètre ψ_G nous permet voir que pour tout classe de conjugaison $\mathrm{cl}(\mathbf{Q}, \mathbf{L}) \in \Sigma_{\mathcal{Q}}$ il existe un unique paramètre d'Arthur,

$$\psi_{Q,L} : W_{\mathbb{R}} \times SL(2, \mathbb{C}) \to {}^L L$$

tel que, à conjugaison près, $\psi_G = \iota_{G,L} \circ \psi_{Q,L}$. Clairement $\psi_{Q,L}(SL(2,\mathbb{C}))$ contient un élément regulier unipotent de $\widehat{\mathbf{L}}$ et $\psi_{Q,L}(W_{\mathbb{R}})$ appartient à $Z(\mathcal{L}) \rtimes W_{\mathbb{R}}$. Associé à $\psi_{Q,L}$ on a une représentation $\pi_{\psi_{Q,L}}$ unitaire de dimension un de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$. J.Adams et J.Johnson utilisent cette représentation pour définir grâce au foncteur d'induction cohomologique la représentation $\pi_{\psi_G,Q,L}$ de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ donnée par,

$$\pi_{\psi_G,Q,L} = R^i_{\mathfrak{q}}(\pi_{\psi_{Q,L}}) \tag{2.7}$$

où $i = (1/2)\dim(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})$, ($\mathfrak{k}$ la complexification de l'algèbre de Lie associée au groupe compact maximal standard K de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$), et $\mathfrak{q} = \mathrm{Lie}(\mathbf{Q})$. Finalement ils définissent l'ensemble $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ par,

$$\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G} := \{\pi_{\psi_G,Q,L} : \mathrm{cl}(\mathbf{Q},\mathbf{L}) \in \Sigma_{\mathcal{Q}}\}.$$

Les représentations dans $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ ont été décrites par Vogan et Zuckerman dans [VZ84] elles sont toutes unitaires et ont une $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie non-nulle.

2.2.1 Construction explicite pour les groupes classiques

Fixons pour notre groupe classique $\mathbf{G}$ un paramètre $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$. Soit $\mathcal{L}$ le centralisateur dans $\widehat{\mathbf{G}}$ de $\psi_G(\mathbb{C}^*)$. C'est un sous-groupe de Levi d'une algèbre parabolique $\mathcal{Q} = \mathcal{L}\mathcal{U}$ de $\widehat{\mathbf{G}}$ tel que pour N on a une égalité $N = d_1n_1 + \cdots + d_rn_r$, où $d_i,\ i \in [1,r]$ est égal à 2 sauf peut etre un seule $i \in [1,r]$ pour qui $d_i = 1$, de manière a ce que, pour $\mathcal{L}$ on ait un isomorphisme,

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{L}_1 \times \cdots \times \mathcal{L}_r,$$

où $\mathcal{L}_i,\ i \in \{1, \cdots, r\}$ est égal à,

$$\mathcal{L}_i = GL(n_i, \mathbb{C}),$$

si $d_i = 2$ et égal à,

$$\mathcal{L}_i = \begin{cases} \mathbf{SO}(n_i,\mathbb{C}) & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n) \text{ où } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 0,2, \\ \mathbf{Sp}(n_i,\mathbb{C}) & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 1, \end{cases}$$

si $d_i = 1$. Par conséquent si $\mathbf{L}$ définit un groupe de Levi de $\mathbf{G}$ avec $\widehat{\mathbf{L}} \cong \mathcal{L}$, pour $i \in [1,r]$ avec $d_i = 2$ il existe une paire $(b_i, c_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $n_i = b_i + c_i$ et pour i avec $d_i = 1$, $\mathbf{G} = SO(p,q),\ p - q = 0, 1, 2$ une paire $(b_i, c_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $b_i + 2\sum_{j \neq i} b_i = p$ et $c_i + 2\sum_{i=1}^{t-1} c_i = q$, de manière que pour $\mathbf{L}$ on ait l'isomorphisme, $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_1 \times \cdots \times \mathbf{L}_t$, où $L_i,\ i \in [1,r]$ est égal à,

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{U}(b_i, c_i),$$

si $d_i = 2$ et égal à,

$$\mathbf{L}_i = \begin{cases} \mathbf{SO}(b_i,c_i) & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 0,1 \text{ ou } 2, \\ \mathbf{Sp}(n_i - 1) & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n), \end{cases}$$

si $d_i = 1$. Pour tout entier $d > 0$, notons par R_d la représentation irréductible de dimension d de $SL(2,\mathbb{C})$. Par les égalités **(2.4)** et **(2.5)** il existe pour chaque $i \in \{1, \cdots, r\}$ avec $d_i = 2$ un caractère χ_i de $W_{\mathbb{R}}$ dont la restriction à $\mathbb{C}^*$ est donnée par,

$$\chi_i|_{\mathbb{C}^*}(z) = (z/|z|)^{p_i}, \qquad p_i \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.8}$$

de manière que pour la restriction de ψ_G à $\mathbb{C}^* \times SL(2,\mathbb{C})$ on ait l'isomorphisme,

$$\psi_G|_{\mathbb{C}^*\times SL(2,\mathbb{C})} \cong \oplus_{i=1}^{r}\psi_G^i \tag{2.9}$$

où,

$$\psi_G^i = (\chi_i \times R_{n_i} \oplus \chi_i^{-1} \times R_{n_i}) \tag{2.10}$$

si $d_i = 2$ et égale à,

$$\psi_G^i = \left\{ \begin{array}{cl} \chi_i \times R_{n_i} & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n) \text{ où } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=1, \\ \chi_i^1 \times R_{n_i-1} \oplus \chi_i^2 \times R_1 & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q)\ p-q=0,2. \end{array} \right. . \tag{2.11}$$

avec χ_i^1 et χ_i^2 de caractères quadratiques de $\mathbb{R}$. En plus si nous considérons pour $i \in [1,r]$ l'ensemble Ψ_i défini par,

$$\Psi_i := \{\pm p_i + n_i - 1, \pm p_i + n_i - 3, \cdots, \pm p_i - n_i + 1\}$$

si $d_i = 2$ et par,

$$\Psi_i = \left\{ \begin{array}{cl} \{n_i - 1, n_i - 3, \cdots, -n_i + 1\} & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n),\ \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=1, \\ \{(n_i-1)-1, (n_i-1)-3, \cdots, -(n_i-1)+1\} & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=0,2 \end{array} \right. .$$

si $d_i = 1$. Alors d'après les equations **(2.4)** et **(2.5)**, pour que ψ_G appartient à $\Psi_{\mathrm{AJ}}(G)$, l'ensemble,

$$\Psi_1 \cup \cdots \cup \Psi_t,$$

doit définir un sous-ensemble de $2\mathbb{Z}$ de cardinalité $\sum_{i=1}^{r} n_i$ si $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n)$, $\sum_{i=1}^{r} n_i - 1$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=0,2$ et un sous-ensemble de cardinalité $\sum_{i=1}^{r} n_i$ de $2\mathbb{Z}+1$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=1$.

Considérons maintenant la représentation standard $\mathrm{St} :\ {}^LG \to GL(N,\mathbb{C})$ de ${}^LG$. Notons ψ le paramètre d'Arthur $\mathrm{St} \circ \psi_G$ de $GL(N,\mathbb{C})$. Pour tout ψ_G disons que ψ est élémentaire si ψ est irréductible. D'après **(2.9)**, le paramètre ψ est élémentaire si et seulement la decomposition pour $\psi_G|_{\mathbb{C}^*\times SL(2,\mathbb{C})}$ se réduit à une seule composante, c'est-à-dire $\psi_G|_{\mathbb{C}^*\times SL(2,\mathbb{C})}$ est défini comme dans **(2.10)** ou **(2.11)**.

Pour $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et δ un caractère quadratique de $\mathbb{R}^*$ ou une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$ définissons la représentation de Speh basée sur δ, $\mathrm{Speh}(\delta, n)$, comme l'unique sous-module irréductible de l'induite,

$$\delta|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} \times \cdots \times \delta|\cdot|^{\frac{n-1}{2}}.$$

On peut facilement voir que si ψ définit un paramètre élémentaire alors la correspondance de Langlands attache à φ_ψ une représentation irréductible Π_ψ donnée par une des possibilités suivantes,

i.) La représentation de Speh, $\mathrm{Speh}(\delta, n)$, basée sur une série discrète de caractère infinitésimal $(p/2, -p/2)$, avec p choisit comme dans **(2.8)** si φ_G est défini par **(2.10)**.

ii.) La représentation de Speh, $\mathrm{Speh}(\delta, N)$, basée sur un caractère quadratique de $\mathbb{R}^*$ si φ_G est défini par **(2.11)** et $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=1$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n+1)$.

iii.) L'induite de la représentation de Speh, $\mathrm{Speh}(\delta_1, N-1)$, δ_1 un caractère quadratique de $\mathbb{R}^*$, avec un caractère quadratique δ_2 de $\mathbb{R}^*$ si φ_G est défini par **(2.11)** et $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q=0,2$.

Soit maintenant $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$, avec $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(G)$ quelconque, d'après **(2.9)** pour ψ il existe une decomposition $\psi = \oplus_{i=1}^r \psi_i$ en somme de paramètres élémentaires, où chaque ψ_i définit un paramètre d'Arthur de $GL(N_i)$ donné comme ci-dessus. Soit $\Pi_{\psi_i},\ i \in [1, r]$, la représentation attachée à φ_{ψ_i} par la correspondance de Langlands. Le produit $\times_{i=1}^r \Pi_{\psi_i}$ est irréductible et il est facile de voir que le L-paramètre associé à $\times_{i=1}^r \Pi_{\psi_i}$ est φ_ψ. Par conséquent pour Π_ψ, la représentation irréductible de $GL(N, \mathbb{R})$ associée à φ_ψ, on a l'égalité,

$$\Pi_\psi = \times_{i=1}^r \Pi_{\psi_i}.$$

avec chaque Π_{ψ_i} la représentation irréductible de $GL(N_i, \mathbb{R})$ attachée à φ_{ψ_i}.

2.2.2 Transfert tordu de représentations cohomologiques

Soit $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$. Pour tout $\pi_{\psi_G,Q,L} \in \Pi_{\psi_G}^{\mathrm{AJ}}$ notons $\delta(\pi_{\psi_G,Q,L}) = (1/2)\dim(\mathbf{L}(\mathbb{R})/\mathbf{L}(\mathbb{R}) \cap K)$, K le groupe compact maximal standard de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Du théorème **(2.13)** de **[AJ87]** la somme,

$$\Theta_{\psi_G} = \sum_{\pi_{\psi_G,Q,L} \in \Pi_{\psi_G}^{\mathrm{AJ}}} (-1)^{\delta(\pi_{\psi_G,Q,L})} \pi_{\psi_G,Q,L}, \tag{2.12}$$

est stable (voir le paragraphe qui succède à l'equation **(2.3)** pour une définition) et du théorème **(2.21)** de **[AJ87]**, elle satisfait des propriétés de tranfert endoscopique ordinaire. Pour montrer la stabilité, Adams et Johnson donnent (corollaire **(8.9)** de **[AJ87]**) une écriture de Θ_{ψ_G} en termes de modules standards, cette écriture est particulièrement bien adaptée au transfert car elle a les propriétés suivantes :

On considère l'ensemble des modules standard dont le quotient irréductible est inférieur ou egal (au sens de Vogan) à l'une des représentations dans $\Pi_{\psi_G}^{\mathrm{AJ}}$; cela donne un ensemble d'induites $I_{P_G}(\sigma)$ (où P_G est un sous-groupe parabolique de Levi M_G de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ et σ une repésentation irréductible tempérée modulo le centre (en fait, grâce à la regularité du caractère infinitésimal σ est une série discrète modulo le centre) de M_G). Si $I_{P_G}(\sigma)$ est dans cet ensemble alors $I_{P_G}(\sigma')$ y est aussi si σ' est dans le même paquet de Langlands que σ. Et la combinaison linéaire stable s'écrit aussi,

$$\Theta_{\psi_G} = \sum_{(P_G,\sigma)} (-1)^{l(P_G,\sigma)} I_{P_G}(\sigma), \tag{2.13}$$

où $l(P_G, \sigma)$ est la longeur de Vogan du sous-quotient de Langlands de $I_{P_G}(\sigma)$ et où (P_G, σ) décrit un sous-ensemble de l'ensemble ci-dessus où la restriction ne porte que sur le fait que si $I_{P_G}(\sigma)$ apparait alors $I_{P_G}(\epsilon \cdot \sigma)$ n'apparait pas si ϵ est un caractère quadratique de M_G et $\epsilon \cdot \sigma$ n'est pas isomorphe à σ. D'après le lemme **(8.8)** de **[AJ87]** le sous-ensemble garde la propriété que si $I_{P_G}(\sigma)$ y est alors $I_{P_G}(\sigma')$ y est aussi si σ' est dans le meme paquet de Langlands que σ. Considérons pour tout $I_{P_G}(\sigma)$ intervenant dans **(2.13)** le L-paramètre de $\mathbf{G}$ associé au paquet de Langlands contenant le sous-quotient de Langlands de $I_{P_G}(\sigma)$, notons par Φ_G l'ensemble de ces paramètres et pour tout $\varphi_G \in \Phi_G$ soit Θ_{φ_G} la somme des modules standards avec φ_G comme paramètre associé. D'après **(2.13)** pour Θ_{ψ_G} on a donc l'égalité,

$$\Theta_{\psi_G} = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\varphi_G)} \Theta_{\varphi_G}, \tag{2.14}$$

où $l(\varphi_G)$ est la longueur de Vogan de n'importe quel élément intervenant dans la somme Θ_{φ_G} (la longueur $l(\varphi_G)$ est bien défini car la longueur de Vogan pour tout élément intervenant dans la somme Θ_{φ_G} est la même, voir paragraphé qui précède le théorème **(8.2)** de **[AJ87]**). Ainsi Θ_{ψ_G} est stable car du lemme **(4.3)** de **[AJ87]**, toute somme Θ_{φ_G} est stable.

Grâce aux résultats récents de Paul Mezo sur le transfert tordu de représentations tempérées, on sait transférer la trace d'un module standard stable de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, c'est la trace tordue du module standard qui s'obtient par transfert des paramètres. Plus clairement, soit $\varphi_G : W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$ un morphisme admissible de $\mathbf{G}$ et ${}^LM'$ un sous-groupe de Levi minimal de ${}^LG$ à travers duquel φ_G se factorise,

$$\varphi_G : W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\varphi_{M'}} {}^LM' \to {}^LG.$$

Notons,

$$\Pi_{\varphi_G} = \{\mathrm{Ind}_{M'}^{G}(\pi_{M'}) : \pi_{M',\varphi_{M'}} \in \Pi_{M'}(\varphi_{M'})\}, \tag{2.15}$$

où $\Pi_{M'}(\varphi_{M'})$ est le paquet des séries discrètes de M' (modulo le centre) associées à $\varphi_{M'}$. L'ensemble Π_{φ_G} on l'appelle le pseudo-paquet associé à φ_G. L'inclusion naturelle ${}^LG \to GL(N,\mathbb{C})$ nous permet d'étendre φ_G en un L-paramètre θ_N-invariant φ de $GL(N)$. Soit ${}^LM$ un sous-groupe de Levi minimal de $GL(N,\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{im}(\varphi) \subset {}^LM$. Notons par $\pi_{M,\varphi}$ la série discrète (modulo le centre) de M correspondant à φ_M, où $\varphi : W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\varphi_M} {}^LM \to GL(N)$. Le résultat suivant est un cas très particulier du théorème **(6.7)** de **[Mez]**,

Théorème 2.2.1. *Soit φ_M et $\varphi_{M'}$ défini comme plus haut, alors il existe un constante $\Delta(\varphi_{M'}, \pi_{M,\varphi})$ tel que,*

$$\mathrm{Tran}_{M'}^{M}\left(\sum_{\pi_{M',\varphi_{M'}} \in \Pi_{\varphi_{M'}}} \pi_{M',\varphi_{M'}}\right) = \Delta(\varphi_{M'}, \rho_M)\mathrm{Tr}_\theta(\pi_{M,\varphi}).$$

La constant $\Delta(\varphi_{M'}, \pi_{M,\varphi})$ du théorème, s'appelle le facteur de transfert tordu et d'après **[Mœg]** elle est égal à 1. D'après les travaux de Shelstad le facteur de transfert commute à l'induction (Voir **[Mœg14]**, début section **2.7**, pour comprendre comme la compabilité des facteurs de transfert à l'induction se déduit du théorème **3.4.2** de **[She82]**), par conséquent, pour tout paramètre φ_G de $\mathbf{G}$ on obtient grâce au théorème **(2.2.1)** que le transfert tordu du module standard stable $\Theta_{\varphi_G} = \sum_{\pi_{M',\varphi_{M'}} \in \Pi_{\varphi_{M'}}} \mathrm{Ind}_{M'}(\pi_{M',\varphi_{M'}})$ est égal à,

$$\mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}) = \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\mathrm{Ind}_M(\pi_{M,\varphi})).$$

Revenons à notre paramètre $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$. L'égalité **(2.14)** et le calcul fait ci-dessus pour le transfert tordu de modules standard nous donne pour le transfert de Θ_{ψ_G}, l'égalité,

$$\mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\psi_G}) = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}) \tag{2.16}$$

$$= \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\varphi_G)} \mathrm{Tr}_{\theta_N}(\mathrm{Ind}_M(\pi_{M,\varphi})), \tag{2.17}$$

où $\varphi := \mathrm{St} \circ \varphi_G$ et $\pi_{M,\varphi}$ ainsi que M sont associés à φ comme plus haut.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de la thèse,

Théorème 2.2.2. *Soit* $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G,\ \psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$. *Alors,*

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = (-1)^{l(\psi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\psi_G}). \tag{2.18}$$

où $l(\psi_G)$ *est défini comme la longueur de Vogan d'un module standard avec comme unique sous-module irréductible, l'élément* $\pi_{\psi_G,Q,L} \in \Pi_{\psi_G}^{\mathrm{AJ}}$ *avec* $\mathbf{L}$ *quasi-deployé.*

D'après **(2.16)** la preuve de **(2.18)** revient à prouver l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\psi_G)-l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}). \tag{2.19}$$

À droite de l'égalité **(2.19)** on a une somme de modules standards θ_N-invariants de $GL(N,\mathbb{R})$, par conséquent, pour montrer **(2.19)** on aura besoin de calculer la trace tordue de Π_ψ à l'aide de modules standards θ_N-invariants de $GL(N,\mathbb{R})$ ensuite le résultat s'obtiendra par comparaison du côté droit de **(2.19)** avec cette écriture de la trace tordue de Π_ψ par de modules standards θ_N-invariants. Ce calcul de Π_ψ à l'aide des modules standards θ_N-invariants sera fait d'abord pour Π_ψ, ψ un paramètre élémentaire, plus clairement on montrera,

Lemme 2.2.1. *Soit* $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G,\ \psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ *élémentaire, alors il existe un ensemble de L-paramètres* Φ *de* $GL(N)$*, constitué par des L-paramètres* $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to GL(N,\mathbb{C})$ *tels que le module standard* $I(\varphi)$ *associé à* φ *est* θ_N*-invariant, de manière que pour la trace tordue de la représentation* Π_ψ *on ait une décomposition,*

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \epsilon_\varphi \mathrm{Tr}_{\theta_N}(I(\varphi)) \tag{2.20}$$

où $\epsilon_\varphi \in \{-1, 1\}$ *et chaque trace tordue est défini par rapport à une action de* θ_N *normalisée comme au chapitre 1.*

La constant $\epsilon_\varphi,\ \varphi \in \Phi$ sera défini au cours du chapitre 4. Ensuite on montrera que le cas de $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G,\ \psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ quelconque, se ramène au cas d'un paramètre élémentaire, c'est-à-dire que, l'on montre,

Lemme 2.2.2. *Soit* $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G,\ \psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ *et considérons une décomposition* $\psi = \oplus_{i=1}^r \psi_i$ *de* ψ *en somme de paramètres élémentaires. Supposons que pour tout* $\psi_i, i \in [1,n]$ *il existe un ensemble* Φ_i *décrit par le lemme* ***(2.2.1)*** *tel que* $\mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(\Pi_{\psi_i})$ *satisfait l'égalité* ***(2.20)*** *alors,*

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \epsilon_\varphi \mathrm{Tr}_{\theta_N}(I(\varphi)). \tag{2.21}$$

où $\Phi := \{\varphi = \otimes_{i=1}^r \varphi_i : \varphi_i \in \Phi_i\}$, $\epsilon(\varphi) = \Pi_{i=1}^r \epsilon(\varphi_i)$ *et* $I(\varphi)$ *correspond au module standard associé à* φ*.*

Une fois les lemmes **(2.2.1)** et **(2.2.2)** prouvés, le théorème **(2.2.2)** s'obtient en prouvant l'égalité,

$$\Phi = \{\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G : \varphi_G \in \Phi_G\} \tag{2.22}$$

et pour tout $\varphi \in \Phi$ avec $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$ l'égalité,

$$\epsilon_\varphi = (-1)^{l(\psi_G)-l(\varphi_G)}. \tag{2.23}$$

Le lemme **(2.2.1)** sera prouvé au chapitre 4 pour tout paramètre ψ avec Π_ψ un caractère de $GL(N,\mathbb{R})$, l'induite d'un caractère de $GL(N-1,\mathbb{R})$ avec un caractère de $\mathbb{R}^*$ ou la représentation de Speh de $GL(N,\mathbb{R}),\ N \leq 8$ basée sur une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$. Le lemme **(2.2.2)** sera prouvé au chapitre trois en supposant la conjecture **(2.2.1)**. Finalement au chapitre 5 on montrera **(2.22)** et **(2.23)**.

Chapitre 3

θ-Résolution pour un certain type de représentations du groupe lineaire tordu

Comme dans le chapitre précédent soit $\mathbf{G}$ un groupe classique défini sur le corps des réels, quasi-deployé et N la dimension de la représentation standard $\mathrm{St} : {}^{L}G \to GL(N, \mathbb{C})$. Pour tout $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ notons $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$ le paramètre de Arthur de $GL(N)$ associé. Au chapitre précédent on a pu voir qu'il existe pour ψ une décomposition $\psi = \oplus_{i=1}^{r} \psi_i$ en somme de paramètres élémentaires, c'est-à-dire, pour N on a une égalité $N = d_1 n_1 + \cdots + d_r n_r$, où $d_i,\ i \in [1, r]$ est égal à 2 sauf peut-être un seul $i \in [1, r]$ pour qui $d_i = 1$, de manière a ce que pout tout $i \in [1, r]$, ψ_i, définit un paramètre de Arthur de $GL(N_i),\ N_i = d_i n_i$, tel que Π_{ψ_i} est donnée par une des possibilités suivantes,

(a) $\Pi_{\psi_i} = \mathrm{Speh}(\delta_i, n_i)$, avec δ_i une série discrète de $GL(2, \mathbb{R})$ si $d_i = 2$.

(b) $\Pi_{\psi_i} = \mathrm{Speh}(\delta_i, N_i)$, avec δ_i un caractère quadratique de $\mathbb{R}^*$ si $d_i = 1$ et $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n)$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p, q),\ p - q = 1$.

(c) $\Pi_{\psi_i} = \mathrm{Speh}(\delta_{i,1}, N_i - 1) \times \delta_{i,2}$, avec $\delta_{i,1}$ et $\delta_{i,2}$ une paire de caractères quadratiques de $\mathbb{R}^*$ si $d_i = 1$ et $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p, q),\ p - q = 0, 2$.

Par conséquent, si par M nous notons le sous-groupe des matrices diagonales par blocs de $GL(N, \mathbb{R})$ défini par,

$$M := GL(n_1, \mathbb{R}) \times \cdots \times GL(n_r, \mathbb{R}),$$

alors on a l'isomorphisme,

$$\Pi_\psi \cong \mathrm{Ind}_M(\Pi_{\psi_1} \otimes \cdots \otimes \Pi_{\psi_r}).$$

L'objectif du présent chapitre est de montrer le lemme **(2.2.2)** (en supposant pour tout $\psi_i,\ i \in [1, r]$ la véracité du lemme **(2.2.1)**). Ce résultat résulte d'une description précise du comportement des traces tordues par induction, les induites que l'on a à regarder sont irréductibles mais l'action de θ_N est subtile, il faut utiliser de façon fine la théorie des opérateurs d'entrelacement et leurs propriétés de méromorphie. Le chapitre s'organise de la manière suivante, on commence par une description des sous-quotients irréductibles de l'induite dont Π_ψ est l'unique sous-module irréductible, ensuite on donne une définition de l'action de θ_N équivalente à celle décrite au premier chapitre. On finit le chapitre avec la preuve du lemme **(2.2.2)**.

3.1 Un résultat d'irréductibilité

Dans tout la suite, on note δ la représentation donnée par une des possibilités suivantes,

(i) Un caractère d'ordre au plus deux de $\mathbb{R}^*$.

(ii) Une paire ordonné $\delta := (\delta_1, \delta_2)$ avec δ_1 et δ_2 une paire de caractères d'ordre au plus deux de $\mathbb{R}^*$.

(iii) Une série discrète auto-duale de $GL(2, \mathbb{R})$. Dans ce dernier cas soit $p \in \{1, 2, \cdots\}$ tel que le caractère infinitésimal de δ est $(p/2, -p/2)$. Alors on va parfois noter $\delta(\frac{p}{2}, -\frac{p}{2})$ au lieu de δ pour rendre le caractère infinitésimal explicite.

Definition 3.1.1. *Soit n un entier positif. Définissons pour toute représentation δ donnée par **(i)** ou **(iii)** le module standard,*

$$I(\delta, n) = \delta|\cdot|^{\frac{n-1}{2}} \times \delta|\cdot|^{\frac{n-1}{2}-1} \times \cdots \times \delta|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}},$$

*où l'induite est pris par rapport au sous-groupe parabolique de Lévi $\Pi_{j=1}^n GL(d, \mathbb{R})$, avec $d = 1$ si δ est définie par **(i)**, $d = 2$ si δ est définie par **(iii)**, contenant le groupe de matrices triangulaires inférieurs de $GL(dn, \mathbb{R})$.*

*Si $\delta := (\delta_1, \delta_2)$ est définie par **(ii)** notons par $I(\delta, n)$ le module,*

$$I(\delta, n) = \delta_1|\cdot|^{\frac{n-2}{2}} \times \cdots \times \delta_1|\cdot|^{\frac{n-2}{2}+1-[n/2]} \times \delta_2 \times \delta_1|\cdot|^{\frac{n-2}{2}-[n/2]} \times \cdots \times \delta_1|\cdot|^{-\frac{n-2}{2}},$$

où l'induite est pris par rapport au sous-groupe de matrices triangulaires inférieurs de $GL(n, \mathbb{R})$.

Prenons maintenant un paramètre $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$, $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ de $GL(N)$. Soit $\psi = \oplus_{i=1}^r \psi_i$ une décomposition de ψ en somme de paramètres élémentaires comme décrit au début du chapitre. On a donc pour tout $i \in [1, r]$ que Π_{ψ_i} est l'unique sous-module irréductible de l'induite $I(\delta_i, n_i)$, avec δ_i définie par **(iii)** si Π_{ψ_i} est donnée par **(a)**, par **(i)** si Π_{ψ_i} est donnée par **(b)** et par **(ii)** si Π_{ψ_i} est donnée par **(c)**. Soit P le sous-groupe parabolique de $GL(N, \mathbb{R})$, de Lévi M, contenant le groupe des matrices triangulaires inférieures. Considérons l'induite,

$$\times_{i=1}^r I(\delta_i, n_i) = \mathrm{Ind}_P(I(\delta_1, n_1) \otimes \cdots \otimes I(\delta_r, n_r)).$$

Il découlera du lemme **(3.1.3)** que Π_ψ est l'unique sous-module irréductible de $\times_{i=1}^r I(\delta_i, n_i)$.

Le suivant lemme technique sera d'une grand utilité dans la suite.

Lemme 3.1.1. *Pour $\psi_G \in \Psi_{AJ}$, soit $\times_{i=1}^r I(\delta_i, n_i)$ le module standard de $GL(N, \mathbb{R})$ associé à φ_ψ, $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$. Alors pour toute paire $j, k \in \{1, \cdots, r\}$ avec $d_j = d_k = 2$ et,*

$$\frac{p_j}{2} + \frac{n_j - 1}{2} > \frac{p_k}{2} + \frac{n_k - 1}{2},$$

on a,

$$\frac{p_j}{2} - \frac{n_j - 1}{2} > \frac{p_k}{2} + \frac{n_k - 1}{2}.$$

Si $k \in \{1, \cdots, r\}$ est tel que $d_k = 1$ alors pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$ avec $d_j = 2$ on a,

$$\frac{p_j}{2} - \frac{n_j - 1}{2} > \begin{cases} \frac{n_k-1}{2} & \text{si } \delta_k \text{ est définie par } \textbf{\textit{(i)}}, \\ \frac{n_k-2}{2} & \text{si } \delta_k \text{ est définie par } \textbf{\textit{(ii)}}. \end{cases}$$

Preuve. Au chapitre precédent on a pu voir que l'ensemble,

$$\Psi_1 \cup \cdots \cup \Psi_r, \tag{3.1}$$

où pour tout $i \in [1, n]$, Ψ_i est défini par,

$$\Psi_i := \begin{cases} \{n_i - 1, n_i - 3, \cdots, -n_i + 1\} & \text{si } \delta \text{ est définie par } \textbf{(i)}, \\ \{(n_i - 1) - 1, (n_i - 1) - 3, \cdots, -(n_i - 1) + 1\} & \text{si } \delta \text{ est définie par } \textbf{(ii)}, \\ \{\pm p_i + n_i - 1, \pm p_i + n_i - 3, \cdots, \pm p_i - n_i + 1\} & \text{si } \delta \text{ est définie par } \textbf{(iii)}, \end{cases}$$

définit un sous-ensemble de $2\mathbb{Z}$ de cardinalité $\sum_{i=1}^{r} n_i$ si $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n)$, $\sum_{i=1}^{r} n_i - 1$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p, q)$, $p - q = 0, 2$ et un sous-ensemble de cardinalité $\sum_{i=1}^{r} n_i$ de $2\mathbb{Z} + 1$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p, q)$ $p - q = 1$.

Pour $i \in \{1, \cdots, r\}$ soit n_i^* égal à n_i si δ_i est définie par **(i)** ou **(iii)** et égal à $n_i - 1$ si δ_i est définie par **(ii)**. Si pour $i \in \{1, \cdots, r\}$ d_i est égal à 1 définissons $p_i := 0$. Fixons un pair $j, k \in \{1, \cdots, r\}$. Comme **(3.1)** définit un sous-ensemble de $2\mathbb{Z}$ ou $2\mathbb{Z} + 1$ on obtient,

$$\left| \frac{p_j}{2} + \frac{n_j^* - 1}{2} - \frac{p_k}{2} - \frac{n_k^* - 1}{2} \right| = l, \tag{3.2}$$

avec l un entier positif. Comme le caractère infinitésimal de ψ_G est, en plus, régulier, on doit en même temps avoir,

$$\frac{p_k}{2} + \frac{n_k^* - 1}{2} \notin \left\{ \frac{p_j}{2} + \frac{n_j^* - 1}{2}, \cdots, \frac{p_j}{2} - \frac{n_j^* - 1}{2} \right\}, \tag{3.3}$$

et

$$\frac{p_j}{2} + \frac{n_j^* - 1}{2} \notin \left\{ \frac{p_k}{2} + \frac{n_k^* - 1}{2}, \cdots, \frac{p_k}{2} - \frac{n_k^* - 1}{2} \right\}. \tag{3.4}$$

Si $d_j = d_k = 2$ et

$$\frac{p_j}{2} + \frac{n_j^* - 1}{2} > \frac{p_k}{2} + \frac{n_k^* - 1}{2},$$

l'entier l est plus petit que $n_j - 1$ et on obtient l'inégalité,

$$\frac{p_j}{2} - \frac{n_j^* - 1}{2} > \frac{p_k}{2} + \frac{n_k^* - 1}{2}.$$

Si $d_k = 1$ l'affirmation **(3.3)** nous donne l'inégalité,

$$\frac{p_j}{2} + \frac{n_j^* - 1}{2} > \frac{n_k^* - 1}{2}.$$

et de **(3.4)** on obtient,

$$\frac{p_j}{2} - \frac{n_j^* - 1}{2} > \frac{n_k^* - 1}{2}.$$

□

Considérons l'ensemble,

$$\mathcal{E}_\psi := \{\otimes_{j=1}^{r} \pi_j, \text{avec } \pi_j \text{ un sous-quotient de } I(\delta_j, n_j)\}. \tag{3.5}$$

Le resultat suivant nous donne une classification de l'ensemble des sous-quotients de $\times_{i=1}^{r} I(\delta_i, n_i)$.

Lemme 3.1.2. *Pour toute répresentation $\pi_M \in \mathcal{E}_\psi$ irréductible, l'induite $Ind_P(\pi_M)$ est irréductible.*

Avant de donner la preuve du lemme **(3.1.2)** on aura besoin de connaître pour chaque i compris entre 1 et r quel est l'ensemble des modules standards de $GL(N_i,\mathbb{R})$ correspondant à l'un des sous-quotients irréductibles de $I(\delta_i, n_i)$.

Étudions d'abord le cas d'un module standard, $I(\delta_j, n_j)$, basé sur une série discrète $\delta_j(\frac{p_j}{2}, -\frac{p_j}{2})$ de $GL(2,\mathbb{R})$. On définit,

$$m_{j,j'} = \frac{p_j}{2} + \frac{n_j - 1}{2} + 1 - j', \qquad 1 \leq j' \leq n_j,$$

et on note par $\delta(m_{j,j'}, -m_{j,j''})$ l'unique série discrète (modulo le centre) de $GL(2,\mathbb{R})$ avec caractère infinitésimal $(m_{j,j'}, -m_{j,j''})$. On peut alors écrire,

$$I(\delta_j, n_j) = \delta(m_{j,1}, -m_{j,n_j}) \times \cdots \times \delta(m_{j,n_j}, -m_{j,1}).$$

Soit s une permutation de $[1, n_j]$. Pour tout $j' \in [1, n_j]$ définissons,

$$\begin{aligned} \delta_{j,j'} &= \delta(m_{j,j'}, -m_{j,s(j')}) && (3.6)\\ &= \delta(\frac{m_{j,j'} + m_{j,s(j')}}{2}, -\frac{m_{j,j'} + m_{j,s(j')}}{2})|\cdot|^{\frac{m_{j,j'} - m_{j,s(j')}}{2}}. && (3.7) \end{aligned}$$

Soit $j'_{(\cdot)} : [1, n_j] \to [1, n_j]$ une bijection tel que,

$$m_{j,j'_1} - m_{j,s(j'_1)} \geq \cdots \geq m_{j,j'_{n_j}} - m_{j,s(j'_{n_j})},$$

alors on définit,

$$I(s) = \times_{l=1}^{n_j} \delta_{j,j'_l}, \tag{3.8}$$

avec l'induite pris par rapport au sous-groupe parabolique de Lévi $\Pi_{j=1}^n GL(2,\mathbb{R})$ contenant le groupe de matrices triangulaires inférieurs de $GL(N,\mathbb{R})$. Comme d'habitude on note $\overline{I(s)}$ pour l'unique sous-module irréductible de $I(s)$.

La proposition suivant découle du théorème **(1)** section **(6)** de **[Joh84]**.

Proposition 3.1.1. *La module X est un sous-quotient irréductible de $I(\delta_j, n_j)$ si et seulement s'il existe une permutation, $s : [1, n_j] \to [1, n_j]$ tel que $X = \overline{I(s)}$.*

Au chapitre 5 section **(5.2.2)** on décrira l'ensemble des L-paramètres de $GL(N_j)$ attachés aux sous-quotients irréductibles de $I(\delta_j, n_j)$.

Considérons maintenant le cas de $I(\delta_j, n_j)$ avec δ_j définie par **(i)** ou **(ii)**. Notons,

$$m_{j,j'} = \frac{n_j - 1}{2} + 1 - j', \qquad 1 \leq j' \leq n_j, \tag{3.9}$$

si δ_j est donnée par **(i)** et,

$$m_{j,j'} = \begin{cases} \frac{n_j - 2}{2} + 1 - j' & \text{si } 1 \leq j' \leq [n_j/2], \\ 0 & \text{si } j' = [n_j/2] + 1, \\ \frac{n_j - 2}{2} + 2 - j' & \text{si } [n_j/2] + 2 \leq j' \leq n_j, \end{cases} \tag{3.10}$$

si δ_j est donnée par **(ii)**.

Soit s une permutation de $[1, n_j]$ avec $s^2 = \mathrm{Id}$ et tel que $s(n_j/2) \neq n_j/2 + 1$ si n_j est pair et δ_j est définie par **(ii)**. Prennons pour tout $j' \in [1, n_j]$ avec $s(j') = j'$ un caractère $\epsilon_{j,j'}$ d'ordre au plus deux de $\mathbb{R}^*$ et définissons,

$$\delta_{j,j'} = \epsilon_{j,j'_l} | \cdot |^{m_{j,j'_l}}. \tag{3.11}$$

On note $\epsilon = \{\epsilon_{j,j'}\}_{s(j')=j'}$. Définissons aussi pour tout $j' \in [1, n_j]$ avec $j' < s(j')$,

$$\begin{aligned} \delta_{j,j'} &= \delta(m_{j,j'}, m_{j,s(j')}) && (3.12)\\ &= \delta(\frac{m_{j,j'} - m_{j,s(j')}}{2}, -\frac{m_{j,j'} - m_{j,s(j')}}{2}) | \cdot |^{\frac{m_{j,j'} + m_{j,s(j')}}{2}}. && (3.13) \end{aligned}$$

Soit $j'_{(\cdot)} : [1, d_s] \to \{j' \in [1, n_j] : j' \leq s(j')\}$, ($d_s$ la cardinalité de $\{j' \in [1, n_j] : j' \leq s(j')\}$) une bijection tel que $m^*_{j,j'_1} \geq \cdots \geq m^*_{j,j'_{d_0}}$ où

$$m^*_{j,j'} = \left\{ \begin{array}{ll} m_{j,j'} & \text{si } s(j') = j' \\ \frac{m_{j,j'} + m_{j,s(j')}}{2} & \text{si } s(j') \neq j' \end{array} \right.$$

et considérons le module standard,

$$I(s, \epsilon) = \times_{l=1}^{d_s} \delta_{j,j'_l}, \tag{3.14}$$

où l'induite est pris par rapport au sous-groupe parabolique de Lévi $\Pi_{l=1}^{d_s} GL(a_l, \mathbb{R})$, avec $a_l = 1$ si $s(j'_l) = j'_l$ et $a_l = 2$ si $s(j'_l) \neq j'_l$, contenant le groupe de matrices triangulaires inférieurs de $GL(N, \mathbb{R})$.

Finalement, si X définit un sous-quotient irréductible de $I(\delta_j, n_j)$ alors il existe une permutation s (définie comme plus haut) de $[1, n_j]$ et une famille $\epsilon = \{\epsilon_{j,j'}\}_{s(j')=j'}$ de caractères d'ordre au plus deux de $\mathbb{R}^*$ de manière à ce que $X = \overline{I(s, \epsilon)}$.

Avant de pouvoir prouver le lemme **(3.1.2)** on aura besoin du résultat suivant,

Lemme 3.1.3. *Pour toute paire j, k avec $1 \leq j < k \leq r$ soit s_j, respectivement s_k, une permutation de $[1, n_j]$, respectivement $[1, n_k]$, avec s_j, respectivement s_k, comme dans le paragraphe qui suit à **(3.10)** si δ_j, respectivement δ_k, est définie par **(i)** ou **(ii)**. Alors pour toute paire, $\delta_{j,j'}$, $\delta_{k,k'}$, avec $\delta_{j,j'}$, respectivement $\delta_{k,k'}$, définie par **(3.8)** si δ_i, respectivement δ_k, est donné par **(iii.)** et par **(3.11)** ou **(3.12)** si δ_i, respectivement δ_k, est donnée par **(i)** ou **(ii)**, la représentation,*

$$\delta_{j,j'} \times \delta_{k,k'}, \tag{3.15}$$

est irréductible.

Pour prouver ce résultat on aura besoin du théorème suivant du à B.Speh **[Spe82]** (théorème **(2.1)** et **(2.2)**).

Théorème 3.1.1. *Pour $i = 1$ ou 2 soit $t_i \in \mathbb{C}$ et n_i un entier égal à 1 ou 2. Soit δ_i un caractère d'ordre au plus deux de $\mathbb{R}^\times$ si $n_i = 1$ et une série discrète de $GL(2, \mathbb{R})$ de caractère infinitésimal $(\frac{p_i}{2}, -\frac{p_i}{2})$, $p_i \in \{1, 2, \cdots\}$ si $n_i = 2$. Alors,*

$$\delta_1 | \cdot |^{t_1} \times \delta_2 | \cdot |^{t_2}$$

définit une représentation irréductible si et seulement si $t_1 - t_2 \notin \mathbb{R}$ ou on est dans une des situations suivants, *(1) Si* $n_1 = n_2 = 1$,

$$\begin{array}{ll} |t_1 - t_2| \notin 2\mathbb{Z} - \{0\} & si,\ \delta_1 \neq \delta_2, \\ |t_1 - t_2| \notin 2\mathbb{Z} + 1 & si,\ \delta_1 = \delta_2. \end{array}$$

(2) Si $n_1 = 2$ *et* $n_2 = 1$,

$$-\frac{p_1}{2} + |t_1 - t_2| \notin \{1, 2, \cdots\}.$$

(3) Si $n_1 = n_2 = 2$,

$$-\frac{1}{2}|p_1 - p_2| + |t_1 - t_2| \notin \{1, 2, \cdots\}.$$

Avant de commencer avec la preuve du lemme **(3.1.3)** on donnera une version plus adéquate à notre situation du point trois du théorème **(3.1.1)**. Pour cela considérons un ensemble de demi-entiers distincts $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ tels que $m_1 > m_2$, $m_3 > m_4$ et $m_j - m_k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j < k \leq 4$. Notons par $\delta(m_1, m_2)$, respectivement $\delta(m_3, m_4)$, la série discrète (modulo le centre) de $GL(2, \mathbb{R})$ avec caractère infinitésimal (m_1, m_2), respectivement (m_3, m_4). Alors la représentation,

$$\delta(m_1, m_2) \times \delta(m_3, m_4) \tag{3.16}$$

est irréductible si et seulement si,

$$(3') \qquad m_1 > m_3 \text{ et } m_2 < m_4 \qquad \text{ou} \qquad m_1 < m_3 \text{ et } m_2 > m_4.$$

On donne d'abord la preuve du point (3').

Preuve. On a pour $\delta(m_1, m_2)$, respectivement $\delta(m_3, m_4)$, l'égalité,

$$\delta(m_1, m_2) = \delta(\frac{m_1 - m_2}{2}, -\frac{m_1 - m_2}{2}) | \cdot |^{\frac{m_1 + m_2}{2}},$$

respectivement,

$$\delta(m_3, m_4) = \delta(\frac{m_3 - m_4}{2}, -\frac{m_3 - m_4}{2}) | \cdot |^{\frac{m_3 + m_4}{2}}.$$

On peut sans perte de généralité supposer, $m_1 > m_3$. Il nous faut voir si **(3.16)** vérifie la condition trois du théorème.
Si $m_2 < m_4$ alors,

$$\frac{1}{2}(-|(m_1 - m_2) - (m_3 - m_4)| + |(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)|) = \begin{cases} m_2 - m_4, \\ m_3 - m_1. \end{cases}$$

Dans le deux cas on obtient un entier negatif, ce qui vérifie le point trois du théorème. La représentation **(3.16)** est donc irréductible. D'un autre côte, si $m_2 > m_4$,

$$\frac{1}{2}(-|(m_1 - m_2) - (m_3 - m_4)| + |(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)|) = \begin{cases} (m_2 - m_4), \\ (m_1 - m_3). \end{cases}$$

Dans le deux cas on obtient un entier positif. Comme la représentation **(3.16)** ne vérifie aucune des conditions du théorème elle est réductible. $\square$

Donnons maintenant la preuve du lemme **(3.1.3)**.

Preuve (3.1.3). Le lemme sera donc prouvé si on arrive à montrer que la représentation **(3.15)** vérifie une des conditions du théorème **(3.1.1)**. Comme dans le produit $\times_{1\leq j\leq r} I(\delta_j, n_j)$ intervient au plus un module standard $I(\delta_j, n_j)$, basé sur δ_j définie par **(i)** ou **(ii)**, au moins une des deux représentations $\delta_{j,j'}$, $\delta_{k,k'}$ doit être une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$.

Considérons d'abord le cas ou δ_j et δ_k sont des séries discrètes de $GL(2,\mathbb{R})$. Notons par $(\frac{p_j}{2}, -\frac{p_j}{2})$, $p_j \in \{1,2,\cdots\}$, respectivement $(\frac{p_k}{2}, -\frac{p_k}{2})$, $p_k \in \{1,2,\cdots\}$ le caractère infinitésimal de δ_j, respectivement δ_k. On peut sans perte de généralité supposer,

$$\frac{p_j}{2} + \frac{n_j-1}{2} > \frac{p_k}{2} + \frac{n_k-1}{2}.$$

Alors du lemme **(3.1.1)** on sait que,

$$\frac{p_j}{2} - \frac{n_j-1}{2} > \frac{p_k}{2} + \frac{n_k-1}{2}. \tag{3.17}$$

Pour $\delta_{j,j'}$, respectivement $\delta_{k,k'}$ on a l'égalité,

$$\begin{aligned}\delta_{j,j'} &= \delta(m_{j,j'}, -m_{j,s_j(j')}),\\ \delta_{k,k'} &= \delta(m_{k,k'}, -m_{k,s_k(k')}).\end{aligned}$$

où,

$$\frac{p_j-n_j+1}{2} \leq m_{j,j'} = \frac{p_j-n_j+1}{2} - 1 + j',\ m_{j,s_j(j')} = \frac{p_j-n_j+1}{2} - 1 + s_j(j') \leq \frac{p_j+n_j-1}{2}, \tag{3.18}$$

respectivement,

$$\frac{p_k-n_k+1}{2} \leq m_{k,k'} = \frac{p_k-n_k+1}{2} - 1 + k',\ m_{k,s_k(k')} = \frac{p_k-n_k+1}{2} - 1 + s_k(k') \leq \frac{p_k+n_k-1}{2}. \tag{3.19}$$

Par conséquent de **(3.17)** on arrive aux inégalités,

$$m_{j,j'} > m_{k,k'} \text{ et } m_{j,s_j(j')} > m_{k,s_k(k')},$$

ce qui vérifie le point (3'). La représentation **(3.15)** est donc irréductible.

Considérons maintenant le cas où δ_j définit une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$ et δ_k est donnée par le point **(i)** ou **(ii)** du début du chapitre.

Du lemme **(3.1.1)** on sait que,

$$\frac{p_j}{2} - \frac{n_j-1}{2} > \frac{n_k-1}{2}. \tag{3.20}$$

Comme plus haut $\delta_{j,j'} = \delta(m_{j,j'}, -m_{j,s_j(j')})$ et la paire $m_{j,j'}$, $m_{j,s_j(j')}$ satisfait **(3.18)**. Pour $\delta_{k,k'}$ on a deux possibilités,

(a) Si $s_k(k') = k'$ il existe $\epsilon_{k,k'}$, un caractère d'ordre au plus deux de $\mathbb{R}^*$ tel que,

$$\delta_{k,k'} = \epsilon_{k,k'} |\cdot|^{m_{k,k'}},$$

avec $m_{k,k'}$ défini par **(3.9)** si δ_k est donnée par **(i)** et par **(3.10)** si δ_k est donnée par **(ii)**.

(b) Si $s_k(k') \neq k'$ alors $\delta_{k,k'} = \delta(m_{k,k'}, m_{k,s_k(k')})$ avec $m_{k,k'}$ et $m_{k,s_k(k')}$ défini par **(3.9)** si δ_k est donnée par **(i)** et par **(3.10)** si δ_k est donnée par **(ii)**.

Dans le cas où $\delta_{k,k'}$ est donnée par **(b)**, l'inégalité **(3.20)** nous permet d'obtenir,

$$m_{j,j'} > m_{k,k'} \text{ et } m_{j,s_j(j')} > m_{k,s_k(k')},$$

ce qui vérifie le point (3'). La représentation **(3.15)** est donc irréductible.

Considérons maintenant le cas où $\delta_{k,k'}$ est donnée par **(a)**. Il nous faut voir si la représentation **(3.15)** vérifie la condition (2) du théorème **(3.1.1)**. Comme $\frac{p_j}{2}+\frac{n_j-1}{2}-\frac{n_k-1}{2}$ est un entier positif on peut trouver un entier positif R tel que,

$$m_{k,k'} = \frac{p_j}{2} + \frac{n_j-1}{2} - R.$$

Pour $\delta_{j,j'}$ on a l'égalité,

$$\delta_{j,j'} = \delta(\frac{m_{j,j'}+m_{j,s_j(j')}}{2}, -\frac{m_{j,j'}+m_{j,s_j(j')}}{2})| \cdot |^{\frac{m_{j,j'}-m_{j,s_j(j')}}{2}}.$$

Notons,

$$\frac{p_{j,j'}}{2} = \frac{m_{j,j'}+m_{j,s_j(j')}}{2} \quad \text{et} \quad x_{j,j'} = \frac{m_{j,j'}-m_{j,s_j(j')}}{2},$$

alors,

$$\begin{aligned} \frac{p_{j,j'}}{2} &= \frac{1}{2}(p_j + (n_j-1) - (j' + s_j(j'))), \\ x_{j,j'} &= \frac{s_j(j') - j'}{2} \end{aligned}$$

et on peut voir que,

$$\begin{aligned} -\frac{p_{j,j'}}{2} + |x_{j,j'} - m_{k,k'}| &= -\frac{1}{2}(p_j + (n_j-1) - (j'+t)) + \left|\frac{t-j'}{2} - \frac{p_j}{2} - \frac{n_j-1}{2} + R\right| \\ &= \begin{cases} R+t+1-p_j-n_j, \\ \qquad -(t+R). \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} p_k/2 - (p_j-n_j)/2, \\ \qquad -(t+R). \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le deux cas on obtient un entier negatif, ce qui vérifie le point (2). La représentation **(3.15)** est donc irréductible. □

Donnons maintenant la preuve du lemme **(3.1.2)**

Preuve. Soit ρ_M^+, respectivement ρ_M^-, un module standard de,

$$M = GL(N_1) \times \cdots \times GL(N_r),$$

avec π_M comme unique sous-module irréductible, respectivement comme unique sous-quotient irréductible. Pour chaque j, $1 \leq j \leq r$ existe une partition de N_j, $\{N_{j,1}, \cdots, N_{j,r_j}\}$

en sommes de 1 ou 2 ainsi que un sous-groupe parabolique P_M^+, de Lévi $\Pi_{j=1}^r \Pi_{j'=1}^{r_j} GL(N_{j,j'})$, contenant le groupe de matrices triangulaires inférieures de M, tel que,

$$\rho_M^+ := \mathrm{Ind}_{P_M^+}^M (\otimes_{j=1}^{r_j} \otimes_{j'=1}^{r'} \sigma_{j,j'} |\cdot|^{x_{j,j'}}),$$

où pour tout $j \in [1, r]$ la représentation $\otimes_{j'=1}^{r'} \sigma_{j,j'} |\cdot|^{x_{j,j'}}$ est définie comme dans **(3.8)** si δ_j est donnée par **(iii)** et par **(3.14)** si δ_j est donnée par **(i)** ou **(ii)**.

Le module standard ρ_M^- s'obtient après réarrangement des blocs, $\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$, qui constituent ρ_M^+. Ça veut dire,

$$\rho_M^- := \mathrm{Ind}_{P_M^-}^M (\otimes_{j=1}^{r_j} \otimes_{j'=1}^{r'} \sigma'_{j,j'} |\cdot|^{y_{j,j'}}).$$

où $\sigma'_{j,j'}|\cdot|^{y_{j,j'}} = \sigma_{j,r_j+1-j'}|\cdot|^{x_{j,r_j+j'-1}}$, et P_M^- est le sous-groupe parabolique de M, de Lévi $\Pi_{j=1}^r \Pi_{j'=1}^{r_j+1-j'} GL(N_{j,j'})$, contenant le groupe de matrices triangulaires inférieures de M.

On peut par définition de ρ_M^+ et ρ_M^- écrire pour π_M le diagramme suivant,

$$\rho_M^- \twoheadrightarrow \pi_M \hookrightarrow \rho_M^+. \tag{3.21}$$

Réarrangeons les blocs, $\sigma_{i,i'}|\cdot|^{x_{i,i'}}$, respectivement $\sigma'_{j,j'}|\cdot|^{y_{j,j'}}$, qui constituent $\mathrm{Ind}_P(\rho_M^+)$, respectivement $\mathrm{Ind}_P(\rho_M^-)$, de façon à ce que si, après réarrangement, nous notons la nouvelle représentation par,

$$\rho^+ := \sigma_1|\cdot|^{x_1} \times \cdots \times \sigma_l|\cdot|^{x_l} \times \cdots,$$

respectivement,

$$\rho^- := \sigma'_1|\cdot|^{y_1} \times \cdots \times \sigma'_t|\cdot|^{y_t} \times \cdots,$$

on ait, $x_l \geq x_{l'}$ si $l < l'$, respectivement, $y_t \leq y_{t'}$ si $t < t'$. D'après le lemme **(3.1.3)**, pour toute paire de blocs $\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$, $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$, $j < k$, qui constituent ρ_M^+ la représentation $\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$ est irréductible, par conséquent,

$$\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}} \cong \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}} \times \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}.$$

et un processus de récurrence nous permet de montrer que l'induite $\mathrm{Ind}_M(\rho_M^+)$ est isomorphe à ρ^+. Il en est de même de $\mathrm{Ind}_P(\rho_M^-)$ et ρ^-. Du diagramme **(3.21)** on peut donc écrire,

$$\rho^- \cong \mathrm{Ind}_P(\rho_M^-) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_P(\pi_M) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P(\rho_M^+) \cong \rho^+.$$

Soit $\overline{\rho^+}$ l'unique sous-module irréductible de ρ^+, il est isomorphe à l'unique quotient irréductible de ρ^-. Comme $\overline{\rho^+}$ est l'unique sous-module irréductible de ρ^+, par la flèche à droite de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$, l'image de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ dans ρ^+ contient $\overline{\rho^+}$ comme sous-module et on peut écrire l'inclusion,

$$\overline{\rho^+} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P(\pi_M). \tag{3.22}$$

Soit J l'unique sous-module maximal de ρ^-, alors $\overline{\rho^+} \cong \rho^-/J$. Par la flèche à gauche de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$, le quotient entre $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ et l'image de J dans $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ est isomorphe à $\overline{\rho^+}$. On peut donc écrire la surjection,

$$\mathrm{Ind}_P(\pi_M) \twoheadrightarrow \overline{\rho^+}. \tag{3.23}$$

D'où on obtient pour $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ l'isomorphisme,

$$\mathrm{Ind}_P(\pi_M) \cong \overline{\rho^+} \oplus \ker\Big(\mathrm{Ind}_P(\pi_M) \twoheadrightarrow \overline{\rho^+}\Big). \tag{3.24}$$

Mais comme la multiplicité de $\overline{\rho^+}$ dans ρ^+ est égal à 1, le noyau de l'application **(3.23)** doit être zéro et l'equation **(3.24)** nous donne un isomorphisme entre $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ et $\overline{\rho^+}$. La répresentation $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ est donc irréductible. □

3.2 L'action de θ

Sur M on fait agir l'automorphisme involutif,

$$\theta_M(m) = J_M(\,{}^t m^{-1})J_M^{-1},$$

ou J_M est donné par la matrice définie par blocs,

$$J_M := \begin{pmatrix} J_{N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{N_r} \end{pmatrix}.$$

avec $J_{N_j},\ 1 \leq j \leq k$ la matrice antidiagonale d'ordre N_j définie comme dans le chapitre 1 equation **(1.2)**. On note J_N la matrice antidiagonale d'ordre N, equation **(1.2)**, Notons,

$$w_M = J_N \cdot J_M^{-1}.$$

Soit P' le sous-groupe parabolique de matrices triangulaires inférieurs, avec facteur de Levi $w_M(M)$. Notons par $N_{P'}$ le radical unipotent de P'. Soit π_M une représentation de M. Pour chaque r-tuple, $\underline{s} := (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$, on définit sur M, le caractère,

$$\chi_{\underline{s}} = |\det|^{s_1} \cdots |\det|^{s_r}.$$

On définit l'opérateur d'entrelacement,

$$M(w_M, \underline{s}, \pi_M) : \mathrm{Ind}_P(\pi_M \cdot \chi_{\underline{s}}) \to \mathrm{Ind}_{P'}(w^\theta(\pi_M \cdot \chi_{\underline{s}})).$$

comme fonction meromorphe de $\underline{s}$ par prolongement analytique dâune formule intégrale (voir **[Art89a]**, chapitre 1). Plus précisement, on considère une autre réalisation de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M \cdot \chi_{\underline{s}})$, où l'espace de la représentation est un espace de fonctions $\mathcal{H}_P(\pi_M)$ sur le compact maximal K de $GL(N, \mathbb{R})$, cet espace ayant lâavantage de ne pas dépendre de $\underline{s}$ (câest lâaction de $GL(N, \mathbb{R})$ qui en dépend). Si $f \in \mathcal{H}_P(\pi_M)$, soit $f_{\underline{s}}$ la fonction de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M \cdot \chi_{\underline{s}})$ qui lui correspond par l'isomorphisme (donné en **(1.9)** avec des notations légèrements différents) entre $\mathcal{H}_P(\pi_M)$ et $\mathrm{Ind}_P(\pi_M \cdot \chi_{\underline{s}})$. On pose alors,

$$(M(w_M, \underline{s}, \pi_M)(f_{\underline{s}})) := \int_{w_M N_P w_M^{-1} \cap N_{P'} \backslash N_{P'}} f(w_M^{-1} n g) dn, \tag{3.25}$$

où N_P est le radical unipotent de P. Cette intégrale converge absolument dans un certain cône de $\mathbb{C}^r$ et est analytique en $\underline{s}$ dans ce cône. Elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}^r$. On commence par donner une normalisation de $M(w_M, \underline{s}, \cdot)$ compatible avec la normalisation du chapitre 1 section **(1.2.1)**.

Lemme 3.2.1. *Soit* $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$, $\psi_G \in \Psi_{AJ}(\mathbf{G})$ *et considérons une décomposition* $\psi = \oplus_{i=1}^r \psi_i$ *de* ψ *en somme de paramètres élémentaires. Notons par* Π_M *la représentation de* M *donnée par,*

$$\Pi_M = I(\delta_1, n_1) \otimes \cdots \otimes I(\delta_r, n_r),$$

où pour tout $i \in [1, r]$ *l'induite* $I(\delta_i, n_i)$ *a* Π_{ψ_i} *comme unique sous-module irréductible.*

Alors il existe une fonction méromorphe,

$$\underline{s} := (s_1, \cdots, s_r) \mapsto r(w_M, \underline{s}),$$

telle que,

$$N(w_M, \underline{s}, \Pi_M) = r(w_M, \underline{s})^{-1} M(w_M, \underline{s}, \Pi_M),$$

définit un opérateur holomorphe et bijectif au point, $\underline{s} = 0$.

Si en plus nous fixons comme au chapitre 1 section ***(1.2.1)*** *une fonctionnelle de Whittaker* Ω_M *de de* Π_M *et notons par* $\Omega(\Pi_M)$, *respectivement* $\Omega(w_M(\Pi_M))$, *la fonctionnelle de Whittaker de* $Ind_P(\Pi_M)$, *respectivement* $Ind_{P'}(w_M(\Pi_M))$, *définie par la formule* ***(1.11)*** *à partir de* Ω_M, *alors on peut choisir* $r(w_M, \underline{s})$ *de manière à avoir,*

$$\Omega(\Pi_M) = \Omega(w_M(\Pi_M)) \circ N(w_M, \underline{0}, \Pi_M). \tag{3.26}$$

Considérons maintenant une représentation π_M *de* M *avec tout sous-quotient contenu dans* $\mathcal{E}_\psi$ *(equation* ***(3.5)****), alors l'opérateur,*

$$N(w_M, \underline{s}, \pi_M) = r(w_M, \underline{s})^{-1} M(w_M, \underline{s}, \pi_M),$$

est aussi holomorphe et bijectif au point, $\underline{s} = 0$.

Si π_M *est un module standard, alors entre la fonctionnelle de Whittaker (définie par la formule* ***(1.11)*** *à partir d'une fonctionnelle de Whittaker* Ω'_M *de* π_M*)* $\Omega(\pi_M)$ *de* $Ind_P(\pi_M)$ *et* $\Omega(w_M(\pi_M))$ *de* $Ind_{P'}(w_M(\pi_M))$ *on a l'identité,*

$$\Omega(\pi_M) = \Omega(w_M(\pi_M)) \circ N(w_M, \underline{0}, \pi_M). \tag{3.27}$$

Preuve. Définissons pour toute paire j, k avec $1 \leq j < k \leq r$, l'opérateur d'entrelacement,

$$\begin{aligned} B_{j,k}(\underline{s}) : \cdots \times I(\delta_j, n_j)|\cdot|^{s_j} \times \cdots \times I(\delta_k, n_k)|\cdot|^{s_k} \times \cdots \\ \to \cdots \times I(\delta_k, n_k)|\cdot|^{s_k} \times \cdots \times I(\delta_j, n_j)|\cdot|^{s_j} \times \cdots . \end{aligned}$$

$B_{j,k}(\underline{s})$, interchange le bloc j et le bloc k et laisse inchangé tout autre bloc. On a pour $M(w_M, \underline{s}, \Pi_M)$ l'égalité,

$$M(w_M, \underline{s}, \Pi_M,) = B_{l,r+1-l}(\underline{s}) \circ \cdots \circ B_{2,r-1}(\underline{s}) \circ B_{1,r}(\underline{s}), \tag{3.28}$$

où $l = \frac{r}{2}$ si r est pair, respectivement $l = \frac{r-1}{2}$ si r est impair.

Pour tout $j \in [1, r]$ et $j' \in [1, n_j]$ soit $\sigma_{j,j'}$ égal à δ_j si δ_j est définie par **(i)** ou **(iii)**, égal à $\delta_{j,1}$ si δ_j est définie par **(ii)** et $j' \neq [n_j/2] + 1$ et égal à $\delta_{j,2}$ si δ_j est définie par **(ii)** et $j' = [n_j/2] + 1$. Notons aussi,

$$x_{j,j'} = \frac{n_j - 1}{2} + 1 - j',$$

si δ_j est définie par **(i)** ou **(iii)** et si δ_j est définie par **(ii)** notons,

$$x_{j,j'} = \begin{cases} \frac{n_j-2}{2} + 1 - j' & \text{si } 1 \leq j' \leq [n_j/2], \\ 0 & \text{si } j' = [n_j/2]+1, \\ \frac{n_j-2}{2} + 2 - j' & \text{si } [n_j/2]+2 \leq j' \leq n_j. \end{cases}$$

Considérons maintenant pour toute paire (j,j'), (k,k'), avec $1 \leq j' \leq n_j$, $1 \leq k' \leq n_k$ et $j < k$, l'opérateur,

$$M_{j,j',k,k'}(s_j,s_k) : \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}+s_j} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}+s_k} \to \delta_k|\cdot|^{x_{k,k'}+s_k} \times \delta_j|\cdot|^{x_{j,j'}+s_j}.$$

D'après **[BW80], (p.126-127)**, il existe une fonction meromorphe, $r_{j,j',k,k'}(s_j,s_k)$, tel que l'opérateur,

$$N_{j,j',k,k'}(s_j,s_k) := r_{j,j',k,k'}(s_j,s_k)M_{j,j',k,k'}(s_j,s_k),$$

est holomorphe et different de zéro au point $s_j = 0$, $s_k = 0$. Comme du lemme **(3.1.3)** la représentation, $\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$, est irréductible l'opérateur $N_{j,j',k,k'}(s_j,s_k)$ est bijectif. Une fois fixé une fonctionnelle de Whittaker $\Omega_{j,j',k,k'}$ de $\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$, respectivement $\Omega_{k,k',j,j'}$ de $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}} \times \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$, la fonction $r_{j,j',k,k'}(s_j,s_k)$ sera choisie de manière à avoir,

$$\Omega_{j,j',k,k'} = \Omega_{k,k',j,j'} \circ N_{j,j',k,k'}(0,0). \tag{3.29}$$

Notons $\times_{1\leq j\leq m} f_j$ la composition $f_m \circ \cdots \circ f_1$. On a pour l'opérateur $B(j,k)$, $j<k$, l'égalité,

$$\begin{aligned} B(j,k)(\underline{s}) = {} & \times_{j'=0}^{n_j-1} \times_{p=1}^{k-j-1} \times_{p'=1}^{n_{j+p}} M_{j,n_j-j',j+p,p'}(s_j,s_{j+p}) \\ & \circ \times_{k'=1}^{n_k} \times_{l=1}^{k-j} \times_{l'=0}^{n_{k-l}-1} M_{k-l,n_{k-l}-l',k,k'}(s_{k-l},s_k). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Pour $j<k$ on définit la fonction méromorphe,

$$b_{j,k}(\underline{s}) := \times_{j'=0}^{n_j-1} \times_{p=1}^{k-j-1} \times_{p'=1}^{n_{j+p}} r_{j,n_j-j',j+p,p'}(s_j,s_{j+p}) \tag{3.31}$$

$$\cdot \times_{k'=1}^{n_k} \times_{l=1}^{k-j} \times_{l'=1}^{n_{k-l}} r_{k-l,l',k,k'}(s_{k-l},s_k). \tag{3.32}$$

Alors,

$$N_{j,k}(\underline{s}) = b_{j,k}(\underline{s})B(j,k)(\underline{s}),$$

est holomorphe et bijectif au point $\underline{s} = 0$. Ce qui nous conduit à définir la fonction méromorphe, $r(w_M,\underline{s})$, par,

$$r(w_M,\underline{s}) := b_{l,r+1-l}(\underline{s}) \circ \cdots \circ b_{2,r-1}(\underline{s}) \circ b_{1,r}(\underline{s}),$$

ou $l = \frac{r}{2}$ si r est pair, respectivement $l = \frac{r-1}{2}$ si r est impair. Définissons finalement l'opérateur, $N(w_M,\underline{s},\Pi_M)$, par,

$$N(w_M,\underline{s},\Pi_M) := r(w_M,\underline{s})M(w_M,\underline{s},\Pi_M).$$

De l'égalité **(3.28)** on a pour $N(w_M,\underline{s},\pi_M)$ la factorisation,

$$N(w_M,\underline{s},\Pi_M) = N_{l,r+1-l}(\underline{s}) \circ \cdots \circ N_{2,r-1}(\underline{s}) \circ N_{1,r}(\underline{s}), \tag{3.33}$$

ou $l = \frac{r}{2}$ si r est pair, respectivement $l = \frac{r-1}{2}$ si r est impair. Chaque facteur qui intervient dans le produit est holomorphe et bijectif au point $\underline{s} = 0$, $N(w_M,\underline{s},\Pi_M)$ définit ainsi un opérateur holomorphe et bijectif au point $\underline{s} = 0$.

Fixons comme au chapitre 1 section **(1.2.1)** une fonctionnelle de Whittaker Ω_M de de Π_M et notons par $\Omega(\Pi_M)$, respectivement $\Omega(w_M(\Pi_M))$, la fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M)$, respectivement $\mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\Pi_M))$, définie par la formule **(1.11))** à partir de Ω_M. On prend de manière analogue une fonctionnelle de Whittaker (définie par rapport à ω) pour toute représentation intermédiaire qui nous permet d'aller de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M)$ à $\mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\Pi_M))$. C'est par rapport à ce choix qu'on choisit les fonctions $r_{j,j',k,k'}$ de façon d'avoir l'égalité **(3.29)**. Ce choix nous permettra donc avoir,

$$\Omega(w_M(\Pi_M)) \circ N(w_M, \Pi_M) = \Omega(\Pi_M).$$

Prennons maintenant pour $I(\delta_j, n_j)$ δ_j définie par **(i)** ou **(ii)**, une suite $\epsilon := \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n_j}\}$ de caractères quadratiques de $\mathbb{R}^*$. Définissons,

$$I(\delta_j, n_j)^\epsilon = \times_{j=1}^{n_j} \epsilon_{j'} \sigma_{j,j'} |\cdot|^{x_{j,j'}}.$$

et notons,

$$\Pi_M^\epsilon = I(\delta_1, n_1) \otimes \cdots \otimes I(\delta_{j-1}, n_{j-1}) \otimes I(\delta_j, n_j)^\epsilon \otimes \cdots \otimes I(\delta_r, n_r).$$

Avant de donner la preuve de la deuxième partie du lemme on aura besoin de montrer pour tout suite $\epsilon := \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{N_j}\}$ que l'opérateur, $N(w_M, \underline{s}, \Pi_M^\epsilon) := \tilde{r}(w_M, \underline{s}) M(w_M, \underline{s}, \Pi_M^\epsilon)$ est holomorphe, bijectif et satisfait **(3.26)** au point zéro.

Pour $\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$, $j' \in [1, n_j]$ et tout bloc $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$, $k \in [1, r] \backslash \{j\}$, on a l'isomorphisme,

$$(\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}) \otimes \epsilon_{j'} \cong \epsilon_{j'} \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}. \tag{3.34}$$

Comme,

$$\begin{aligned} N_{j,j',l,l'} = r_{j,j',k,k'}(s_j, s_k) M_{j,j',k,k'}(s_j, s_k) : \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}+s_j} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}+s_k} \\ \to \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}+s_k} \times \sigma_{j,j'}|\cdot|^{m_{j,j'}+s_j}, \end{aligned}$$

est holomorphe et bijectif au point $s_j = s_k = 0$ on peut d'après l'isomorphisme **(3.34)** dire de même de,

$$\begin{aligned} N_{j,j',l,l'}^\epsilon = r_{j,j',k,k'}(s_j, s_k) M_{j,j',k,k'}^{\epsilon_{j'}}(s_j, s_k) : \epsilon_{j'} \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}+s_j} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}+s_k} \\ \to \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}+s_k} \times \epsilon_{j'} \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}+s_j}. \end{aligned}$$

Comme en plus tout bloc $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$, $k \in [1, r] \backslash \{j\}$ constitue à la fois un bloc de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M)$ et de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M^\epsilon)$, la même construction qui a été suivi pour obtenir **(3.33)**, nous permet d'écrire, $N(w_M, \underline{s}, \Pi_M^\epsilon) := r(w_M, \underline{s}) M(w_M, \underline{s}, \Pi_M^\epsilon)$ comme un produit d'opérateurs holomorphes et bijectifs au point zéro. Ainsi $N(w_M, \underline{s}, \Pi_M^\epsilon)$ définit un opérateur holomorphe et bijectif au point zéro.

Comme pour $\sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$, $j' \in [1, N_j]$ et tout bloc $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$, $k \in [1, r] \backslash \{j\}$, on a **(3.34)**, la fonctionnelle de Whittaker $\Omega_{j,j',k,k'}^\epsilon$ de $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}} \times \epsilon_{j'} \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$ doit être donnée par la tensorisation de la fonctionnelle de Whittakker $\Omega_{k,k',j,j'}$ de $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}} \times \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$ pris plus haut, c'est-à-dire pour tout $f \in \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}} \times \epsilon_{j'} \sigma_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$, la fonctionnelle $\Omega_{j,j',k,k'}^\epsilon$, est définie par,

$$\Omega_{k,k',j,j'}^\epsilon(\cdot) = \Omega_{k,k',j,j'}((\epsilon_{j'} \circ \det) \cdot (\cdot)), \tag{3.35}$$

Si maintenant $\sigma_{l,l'}$ et $\sigma_{k,k'}$ définissent des séries discrètes de $GL(2,\mathbb{R})$ on sait que $\sigma_{l,l'}|\cdot|^{x_{l,l'}}$ et $\sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$ constituent des blocs de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M)$ et de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M^{\epsilon})$, notons dans ce cas $\Omega^{\epsilon}_{l,l',k,k'} = \Omega_{l,l',k,k'}$, avec $\Omega_{l,l',k,k'}$ la fonctionnelle de Whittakker de $\sigma_{l,l'}|\cdot|^{x_{l,l'}} \times \sigma_{k,k'}|\cdot|^{x_{k,k'}}$ pris plus haut. Comme tout fonction $r_{k,k,l,l'}$ a été choisi de manière d'avoir **(3.29)**, pour toute paire des blocs (l,l'), (k,k'), $l<k$ qui constitue $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M^{\epsilon})$ on obtient,

$$\Omega^{\epsilon}_{l,l',k,k'} = \Omega^{\epsilon}_{k,k',l,l'} \circ N^{\epsilon}_{k,k',l,l'},$$

avec $N^{\epsilon}_{k,k',l,l'} = N_{k,k',l,l'}$ si $k,l \in [1,r]\setminus\{j\}$. Ce qui nous permet de conclure **(3.26)** pour $N(w_M,\underline{0},\Pi_M^{\epsilon})$.

Considérons maintenant une représentation $\pi_M \in \mathcal{E}_{\psi}$ irréductible. Soit $V_1 \supseteq V_2$ un paire de sous-modules de Π_M, tels que,

$$V_1/V_2 \cong \pi_M.$$

Comme $N(w_M,\underline{s},\Pi_M)$ est holomorphe et bijectif au point $\underline{s}=0$, on obtient de l'inclusion

$$\mathrm{Ind}_P(\Pi_M|_{V_1}\cdot\chi_{\underline{s}}) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P(\Pi_M\cdot\chi_{\underline{s}}),$$

que l'opérateur,

$$N(w_M,\underline{s},\Pi_M|_{V_1}) = r(w_M,\underline{s})M(w_M,\underline{s},\Pi_M|_{V_1}),$$

est aussi holomorphe et bijectif au point $\underline{s}=0$. On note par $F(\underline{s})$ et $F_{w_M}(\underline{s})$, $\underline{s}\in\mathbb{C}^r$ la paire de morphismes surjectif,

$$\begin{aligned} F(\underline{s}) &: \mathrm{Ind}_P(\Pi_M|_{V_1}\cdot\chi_{\underline{s}}) \to \mathrm{Ind}_P(\pi_M\cdot\chi_{\underline{s}}). \\ F_{w_M}(\underline{s}) &: \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\Pi_M|_{V_1}\cdot\chi_{\underline{s}})) \to \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M\cdot\chi_{\underline{s}})). \end{aligned}$$

On définit,

$$N(w_M,\underline{s},\pi_M) = r(w_M,\underline{s})M(w_M,\chi_{\underline{s}},\pi_M).$$

On a, car $M(w_M,\chi_{\underline{s}},\cdot)$ s'obtient par prolongement analytique de l'intégrale **(3.25)**, que le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}_P(\Pi_M|_{V_1}\cdot\chi_{\underline{s}}) \arrow[r, "N(w_M,\underline{s},\Pi_M|_{V_1})"'] \arrow[d, "F(\underline{s})"'] & \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\Pi_M|_{V_1}\cdot\chi_{\underline{s}})) \arrow[d, "F_{w_M}(\underline{s})"'] \\ \mathrm{Ind}_P(\pi\cdot\chi_{\underline{s}}) \arrow[r, "N(w_M,\underline{s},\pi_M)"'] & \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi\cdot\chi_{\underline{s}})), \end{tikzcd}$$

Donc $F_{w_M}(\underline{s})\circ N(w_M,\chi_{\underline{s}},\Pi_M|_{V_1}) = N(w_M,\chi_{\underline{s}},\pi_M)\circ F(\underline{s})$ et comme $F_{w_M}(\underline{s})\circ N(w_M,\chi_{\underline{s}},\Pi_M|_{V_1})$ est holomorphe et surjectif au point $\underline{s}=0$ on peut dire de même de $N(w_M,\chi_{\underline{s}},\pi_M)\circ F(\underline{s})$.L'opérateur $N(w_M,\chi_{\underline{0}},\pi_M)$ est en conséquence surjectif et comme $F(\underline{s})$ est holomorphe est surjectif au point $\underline{s}=0$ on obtient que $N(w_M,\chi_{\underline{s}},\pi_M)$ est holomorphe au point $\underline{s}=0$.

On prend maintenant un élément $v\in\ker(N(w_M,0,\pi_M))$, soit $w\in\mathrm{Ind}_P(\Pi_M|_{V_1})$ tel que $F(w)=v$ ($F:=F(0)$), alors $F_{w_M}\circ N(w_M,0,\Pi_M|_{V_1})(w)=0$ ($F_{w_M}:=F_{w_M}(0)$), si et seulement si, $N(w_M,0,\Pi_M|_{V_1})(w)\in\ker(F_{w_M})$, donc $w\in\ker(F)$ et $v=0$. D'òu on peut conclure que l'opérateur $N(w_M,\chi_{\underline{s}},\pi_M)$ est holomorphe et bijectif au point $\underline{s}=0$.

Soit à présent π_M une représentation de M avec tout sous-quotient dans $\mathcal{E}_\psi$. Supposons que,

$$N(w_M, \underline{s}, \pi_M) = r(w_M, \underline{s}) M(w_M, \underline{s}, \pi_M),$$

a un pole en $\underline{s} = 0$. On choisit une fonction meromorphe $l(\underline{s})$ tel que $l(\underline{0}) = 0$ et $l(\underline{s}) \cdot N(w_M, \underline{s}, \pi_M)$ est holomorphe et différent de zéro au point $\underline{s} = 0$. Soit H un sous-module irréductible de,

$$\mathrm{Ind}_P(\pi_M) / \ker(l(\underline{0}) \cdot N(w_M, \underline{0}, \pi_M)).$$

Comme tout sous-quotient de π_M est contenu dans $\mathcal{E}_\psi$ il existe $\pi' \in \mathcal{E}_\psi$, irréductible, tel que,

$$H \cong \mathrm{Ind}_P(\pi').$$

Par définition de $l(\underline{s})$ l'opérateur, $l(\underline{s}) \cdot N(w_M, \underline{s}, \pi')$ est holomorphe et différent de zéro au point $\underline{s} = 0$, au même moment on a vu plus haut que $N(w_M, \underline{s}, \pi')$ est aussi holomorphe au point $\underline{s} = 0$, par conséquent, $l(\underline{0}) \cdot N(w_M, 0, \pi') \equiv 0$, ce qui est une contradiction. L'opérateur $N(w_M, \underline{s}, \pi_M)$ est donc holomorphe au point $\underline{s} = 0$.

Choisissons maintenant un sous-module irréductible H de $\ker(N(w_M, \underline{0}, \pi_M))$. Il existe $\pi' \in \mathcal{E}_\psi$, irréductible, tel que,

$$H \cong \mathrm{Ind}_P(\pi').$$

Comme on a vu plus haut, l'opérateur $N(w_M, \underline{0}, \pi')$ est bijectif et on peut dire de même de, $N(w_M, 0, \pi_M)|_H$. Par conséquent H est l'espace nul et l'opérateur $N(w_M, \underline{s}, \pi_M)$ est injectif au point $\underline{s} = 0$. Par un calcul analogue à celui qui a été suivi jusqu'ici, l'opérateur $N(w_M^{-1}, 0, w_M(\pi_M)) : \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M)) \to \mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ est injectif, on peut donc conclure que $N(w_M, 0, \pi_M)$ est surjectif.

Il nous reste à montrer pour tout π_M, module standard de M avec tout sous-quotient dans $\mathcal{E}_\psi$, l'equation **(3.27)**. Pour chaque $i \in [1, r]$ existe un module standard π_M^i de $GL(N_i, \mathbb{R})$ de manière à ce que,

$$\pi_M \cong \pi_M^i \otimes \cdots \otimes \pi_M^r.$$

Pour $i \in [1, r]$ avec δ_i une série discète de $GL(2, \mathbb{R})$ on peut toujours définir un morphisme surjectif ϕ_M^i de $I(\delta_i, n_i)$ sur π_M^i. En suite pour $I(\delta_j, n_j)$, $j \in [1, r]$ avec δ_j définie par **(i)** ou **(ii)**, il existe, d'après le lemme **(B.0.2)** de l'appendice **B**, une suite $\epsilon = \{\epsilon_{j'}\}_{j'=1}^{N_j}$ de caractères quadratiques et un morphisme surjectif ϕ_M^j de $I(\delta_j, n_j)^\epsilon$ sur π_M^j. Comme plus haut, soit, $\Pi_M^\epsilon = I(\delta_1, n_1) \otimes \cdots \otimes I(\delta_j, n_j)^\epsilon \otimes \cdots \otimes I(\delta_r, n_r)$ et notons par,

$$\phi_M : \Pi_M^\epsilon \to \pi_M.$$

le morphisme surjectif qu'on obtient après tensorisation des morphisme ϕ_M^i, $i \in [1, r]$. On induit ϕ_M pour obtenir,

$$\phi : \mathrm{Ind}_P(\Pi_M^\epsilon) \to \mathrm{Ind}_P(\pi_M),$$

et

$$\phi_{w_M} : \mathrm{Ind}_P(w_M(\Pi_M^\epsilon)) \to \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M)),$$

Fixons comme au chapitre 1 section **(1.2.1)** une fonctionnelle de Whittaker Ω'_M de π_M et notons par $\Omega(\pi_M)$, respectivement $\Omega(w_M(\pi_M))$, la fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$, respectivement $\mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M))$, définie par la formule **(1.11)** à partir de Ω'_M. Comme $\Omega(\pi_M) \circ \phi$, respectivement $\Omega(w_M(\pi_M)) \circ \phi_{w_M}$, définit une fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\Pi^\epsilon_M)$, respectivement $\mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\Pi^\epsilon_M))$, on peut choisir ϕ_M de manière à ce que,

$$\Omega(\pi_M) \circ \phi = \Omega(\Pi^\epsilon_M), \tag{3.36}$$

respectivement,

$$\Omega(w_M(\pi_M)) \circ \phi_{w_M} = \Omega(w_M(\Pi^\epsilon_M)). \tag{3.37}$$

On a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_P(\Pi^\epsilon_M) \arrow[r, "N(w_M,\underline{0},\Pi^\epsilon_M)"'] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\Pi_M\epsilon)) \arrow[d, "\phi_{w_M}"'] \\
\mathrm{Ind}_P(\pi_M) \arrow[r, "N(w_M,\underline{0},\pi_M)"'] & \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M)),
\end{tikzcd}$$

Car, $\Omega(w_M(\pi_M)) \circ N(w_M, 0, \pi_M)$ définit une fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$, il existe une constante $C_{\pi_M} \in \mathbb{C}^\times$ tel que, $\Omega(w_M(\pi_M)) \circ N(w_M, 0, \pi_M) = C_{\pi_M}\Omega(\pi_M)$, alors,

$$\begin{aligned}
\Omega(\Pi^\epsilon_M) &= \Omega(w_M(\Pi^\epsilon_M)) \circ N(w_M, 0, \Pi^\epsilon_M) \\
&= \Omega(w_M(\pi_M)) \circ \phi_{w_M} \circ N(w_M, 0, \Pi^\epsilon_M) \\
&= \Omega(w_M(\pi_M)) \circ N(w_M, 0, \pi_M) \circ \phi \\
&= C_{\pi_M}\Omega(\pi_M) \circ \phi \\
&= C_{\pi_M}\Omega(\Pi^\epsilon_M).
\end{aligned}$$

Donc $C_{\pi_M} = 1$ et on peut conclure que,

$$\Omega(w_M(\pi_M)) \circ N(w_M, 0, \pi_M) = \Omega(\pi_M).$$

□

Soit (π_M, V_M) un module standard θ_M-invariant de M avec tout sous-quotient dans $\mathcal{E}_\psi$. On vient de construire un opérateur d'entrelacement normalisé entre $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ et $\mathrm{Ind}_P(w_M(\pi_M))$, notre objectif est de définir un opérateur d'entrelacement entre $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ et $\mathrm{Ind}_P(\pi_M) \circ \theta_N$.

Si nous fixons un opérateur d'entrelacement A_{π_M} entre π_M et $\pi_M^{\theta_M} = \pi_M \circ \theta_M$ tel que $A^2_{\pi_M} = \mathrm{Id}$ et considérons l'opérateur,

$$\vartheta : \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M)) \to \mathrm{Ind}_P(\pi_M^{\theta_M}),$$

définit pour tout $f \in \mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\pi_M))$ par,

$$\vartheta(f)(g) = f(\theta_N(g)),$$

alors la composition,

$$\widetilde{A}_{\theta_N}(f) = \mathcal{A}_{\pi_M} \circ \vartheta \circ N(w_M, 0, \pi_M)(f).$$

où $\mathcal{A}_{\pi_M}$ est l'induit de A_{π_M} nous donne un opérateur d'entrelacement entre $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ et $\mathrm{Ind}_P(\pi_M) \circ \theta_N$. Ce qui nous permet d'étendre $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ en une représentation de l'espace tordu $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$. Il nous reste à savoir si l'action de θ_N définie par $\widetilde{A}_{\theta_N}$ provient de la normalisation de Whittaker donnée au chapitre 1. Les deux résultats suivants nous donneront la réponse à cette question.

Lemme 3.2.2. *L'opérateur $\widetilde{A}_{\theta_N}$ définit une action de θ_N sur $Ind_P(\pi_M)$ qui préserve le modèle de Whittaker si A_{π_M} préserve le modèle de Whittaker de π_M.*

Preuve. Fixons une fonctionnelle de Whittaker Ω_M de π_M tel que, $\Omega_M \circ A_{\pi_M} = \Omega_M$. Soit $\Omega(\Pi_M)$, respectivement $\Omega(w_M(\Pi_M))$, la fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\Pi_M)$, respectivement $\mathrm{Ind}_{P'}(w_M(\Pi_M))$, définie par la formule **(1.11)** à partir de Ω_M. Par le lemme **(3.2.1)** on a,

$$\begin{aligned}\Omega(\pi_M) &= \Omega(w_M(\pi_M)) \circ N(w_M, 0, \pi_M)\\ &= \Omega(w_M(\pi_M)) \circ \vartheta^{-1} \circ \mathcal{A}_{\pi_M}^{-1} \circ \widetilde{A}_{\theta_N}.\end{aligned}$$

Soit $\Omega(\pi_M^{\theta_M})$ la fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\pi_M^{\theta_M})$. Pour tout point $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, soit $\pi_{M,\lambda}$ la torsion par λ de π_M. Soit $f \in \mathrm{Ind}_P(\pi_{M,\lambda}^{\theta_M})$. Comme le caractère générique χ (Voir equation **(1.5)**) est θ_N-invariant, un changement de variable nous donne, pour λ où **(1.10)** converge, l'égalité,

$$\begin{aligned}\Omega(\pi_{M,\lambda}^{\theta_M})(\vartheta f) &= \int_{N_*} \Omega_M(f(\theta_N(w_*^{-1})\theta_N(n_*)))\chi_U^{-1}(n_*)dn_*\\ &= \int_{\theta_N(N_*)} \Omega_M(f(\theta_N(w_*)^{-1}n'))\chi_U^{-1}(\theta_N(n'))dn',\ n' = \theta_N(n_*)\\ &= \Omega(w_M(\pi_{M,\lambda}))(f).\end{aligned}$$

Finalement de l'unicité de l'extension analytique on obtient, $\Omega(\pi_M^{\theta_M}) \circ \vartheta = \Omega(w_M(\pi_M))$. On peut donc écrire,

$$\Omega(\pi_M) = \Omega(\pi_M^{\theta_M}) \circ \mathcal{A}_{\pi_M}^{-1} \circ \widetilde{A}_{\theta_N},$$

et comme par hypothèse, $\Omega_M A_{\pi_M} = \Omega_M$, on obtient,

$$\Omega(\pi_M^{\theta_M}) \circ \mathcal{A}_{\pi_M}^{-1} = \Omega(\pi_M).$$

D'où on conclut,

$$\Omega(\pi_M) = \Omega(\pi_M) \circ \widetilde{A}_{\theta_N}.$$

□

Il nous reste à prouver,

Lemme 3.2.3. *Soit $\pi_M \in \mathcal{E}_\psi$ irréductible et θ_M-invariante. Si A_{π_M} provient de la normalisation de Whittaker alors $\widetilde{A}_{\theta_N}$ provient aussi de la normalisation de Whittaker.*

Preuve. Soit ρ_M un module standard de,

$$M := GL(n_1,\mathbb{R}) \times \cdots \times GL(n_r,\mathbb{R}),$$

avec π_M comme unique sous module irréductible. Pour chaque j, $1 \leq j \leq r$, il existe une partition de N_j, $\{N_{j,1}, \cdots, N_{j,t_j}\}$, en somme de 1 ou 2 tel que,

$$\rho_M := \mathrm{Ind}_{P_M}^M(\otimes_{j=1}^r \otimes_{j'=1}^{t_j} \delta_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}).$$

où $x_{j,j'} \geq x_{j,j''}$ si $j' < j''$ et $\delta_{j,j'}$ définit une série discrète de $GL(N_{j,j'}, \mathbb{R})$. L'induite est pris par rapport au sous-groupe parabolique P_M de Lévi $\Pi_{j=1}^r \Pi_{j'=1}^{t_j} GL(N_{j,j'})$ contenant le groupe de matrices triangulaires inférieures de M.

Réarrangeons les blocs, $\delta_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$, qui constituent $\mathrm{Ind}_P(\rho_M)$, de façon à ce que si, après réarrangement, nous notons la nouvelle représentation par,

$$\rho := \delta_1|\cdot|^{x_1} \times \cdots \times \delta_l|\cdot|^{x_l} \times \cdots,$$

on ait $x_l \geq x_{l'}$ si $l < l'$ et pour tout l avec $x_l \neq 0$, $\delta_{r^*+1-l}|\cdot|^{x_{r^*+1-l}} = \delta_l|\cdot|^{-x_l}$, $r^* = t_1 + \cdots + t_r$. On a demontré au cours de la preuve du lemme **(3.1.3)** que $\mathrm{Ind}_P(\rho_M)$ est isomorphe à ρ. Notons par L l'isomorphisme entre $\mathrm{Ind}_P(\rho_M)$ et ρ. Il nous faut montrer la commutativité du diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ind}_P(\pi_M) & \hookrightarrow & \mathrm{Ind}_P(\rho_M) & \xrightarrow{L} & \rho \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{A}_{\theta_N}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{A}_{\theta_N}} & & \downarrow{\scriptstyle A_{\theta_N}} \\
\mathrm{Ind}_P(\pi_M) & \hookrightarrow & \mathrm{Ind}_P(\rho_M) & \xrightarrow{L} & \rho,
\end{array}$$

où A_{θ_N} correspond à l'opérateur défini au chapitre 1 equation **(1.8)**.

Pour tout bloc $\delta_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$ soit $l \in [1, r^*]$, $r^* = t_1 + \cdots, t_r$ tel que $\delta_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} = \delta_l|\cdot|^{x_l}$. Fixons maintenant un élément $s \in i\mathbb{R}$ non nul et définissons,

$$s_{j,j'} := \begin{cases} 0 & \text{si } x_{j,j'} = 0, \\ \mathrm{sgn}(x_{j,j'}) \cdot s \cdot \max(l, r^* + 1 - l) & \text{si } x_{j,j'} \neq 0. \end{cases}$$

Soit,

$$\mathrm{Ind}_P(\rho_M(s)) := \mathrm{Ind}_P(\mathrm{Ind}_{P_M}^M(\otimes_{j=1}^r \otimes_{j'=1}^{t_j} \delta_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}+s_{j,j'}})).$$

et,

$$\rho(s) := \delta_1|\cdot|^{x_1+s_1} \times \cdots \times \delta_l|\cdot|^{x_l+s_l} \times \cdots,$$

où $s_l = s_{j,j'}$ si $\delta_l|\cdot|^{x_l} = \delta_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}}$. Comme pour toute paire $s_{j,j'}$, $s_{k,k'}$ on a $s_{j,j'} - s_{k,k'} \notin \mathbb{R}$ où $s_{j,j'} - s_{k,k'} = 0$, du théorème **(3.1.1)** on sait que la représentation $\mathrm{Ind}_P(\rho_M(s))$, respectivement $\rho(s)$, est irréductible. Pour tout $s \in i\mathbb{R}$ on a un diagramme,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ind}_P(\rho_M(s)) & \xrightarrow{L(s)} & \rho(s) \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{A}_{\theta_N}(s)} & & \downarrow{\scriptstyle A_{\theta_N}(s)} \\
\mathrm{Ind}_P(\rho_M(s)) & \xrightarrow{L(s)} & \rho(s).
\end{array}$$

Fixons comme au chapitre 1 section **(1.2.1)** une fonctionnelle de Whittaker ω de $\delta_1|\cdot|^{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_l|\cdot|^{x_l} \otimes \cdots$ et notons par $\Omega(s)$, $s \in i\mathbb{R}$, la fonctionnelle de Whittaker du module standard $\rho(s)$ définie par **(1.11)** à partir de ω, pour ω on a l'égalité $\omega = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_l \otimes \cdots$, avec chaque ω_i une fonctionnelle de Whittaker de δ_i. D'après l'equation **(1.16)**,

$$\Omega(s) = \Omega(s) \circ A_{\theta_N}(s). \tag{3.38}$$

Soit $\Omega_M(s)$ la fonctionnelle de Whittaker de $\rho_M(s)$ définie par **(1.11)** à partir de $\otimes_{j=1}^{r}\otimes_{j'=1}^{t_j}$ $\omega_{j,j'}$, où $\omega_{j,j'}$ est pour chaque (j,j') avec $\delta_{j,j'}|\cdot|^{x_{j,j'}} = \delta_l|\cdot|^{x_l}$, $l \in [1,r^*]$, définie par $\omega_{j,j'} = \omega_l$. Notons aussi par $\Omega(\rho_M(s))$, la fonctionnelle de Whittaker de $\mathrm{Ind}_P(\rho_M(s))$, définie par **(1.11)** à partir de $\Omega_M(s)$. Comme $\Omega(s) \circ L(s)$ définit une fonctionnelle de Whittaker non-nulle pour $\mathrm{Ind}_P(\rho_M(s))$, l'unicité multiplication par un scalaire près de la fonctionnelle de Whittaker, nous permet de conclure l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que, $\lambda\Omega(\rho_M(s)) = \Omega(s) \circ L(s)$, par conséquent $\Omega(\rho_M(s)) \circ L(s)^{-1} = \lambda^{-1}\Omega(s)$ et comme, d'après le lemme **(3.2.2)**, l'opérateur $\widetilde{A}_{\theta_N}(s)$ préserve $\Omega(\rho_M(s))$, on obtient,

$$\Omega(s) = \Omega(s) \circ L(s) \circ \widetilde{A}_{\theta_N}(s) \circ L^{-1}(s). \tag{3.39}$$

En combinant **(3.38)** et **(3.39)** on conclut, car $\rho(s)$ est irréductible, l'égalité, $L(s) \circ \widetilde{A}_{\theta_N}(s) \circ L^{-1}(s) = A_{\theta_N}(s)$. Comme finalement $L(s) \circ \widetilde{A}_{\theta_N}(s) \circ L^{-1}(s)$ définit un opérateur holomorphe au point $s = 0$, on peut écrire, $L \circ \widetilde{A}_{\theta_N} \circ L^{-1} = A_{\theta_N}$. □

3.3 Preuve du Lemme (2.2.2)

Cette dernière section est destiné à la preuve du lemme **(2.2.2)**.

Preuve. Prenons un paramètre $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$, $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ de $GL(N)$. Soit $\psi = \oplus_{i=1}^{r}\psi_i$ une décomposition de ψ en somme de paramètres élémentaires comme décrit au début du chapitre et supposons que pour chaque ψ_i, $i \in [1,r]$ le lemme **(2.2.1)** est vrai, c'est-à-dire qu'il existe pour chaque $i \in [1,r]$, un ensemble de L-paramètres Φ_i de $GL(N_i)$, constitué par des L-paramètres $\varphi_i : W_{\mathbb{R}} \to GL(N_i,\mathbb{C})$ tels que le module standard $I(\varphi_i)$ associé à φ_i est θ-invariant, de manière à ce que,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(\Pi_{\psi_i}) = \sum_{\varphi_i \in \Phi_i} \epsilon_{\varphi_i} \mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(I(\varphi_i)),$$

où $\epsilon_{\varphi_i} \in \{-1,1\}$ et chaque trace tordue est définie par rapport à une action de θ_{N_i} normalisée avec un modèle de Whittaker de façon conforme a ce que a été fait au chapitre 1.

Pour tout $i \in [1,r]$ notons $\mathcal{R}(GL(N_i,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle)$ le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de $GL(N_i,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle$. Le groupe $\mathcal{R}(GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle)$ a comme base l'ensemble des représentations irréductibles de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle$. Pour toute représentation irréductible π de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle$ on a une de deux posibilités suivants,

a. La restriction $\pi|_{GL(N_i,\mathbb{R})}$ de π à $GL(N_i,\mathbb{R})$ est irréductible.

b. La restriction de π à $GL(N_i,\mathbb{R})$ satisfait l'égalité $\pi|_{GL(N_i,\mathbb{R})} = \sigma \oplus \sigma^{\theta_{N_i}}$ avec σ une représenation irréductible de $GL(N_i,\mathbb{R})$.

Notons par $\widetilde{\Pi}_{\psi_i}$, respectivement $\widetilde{I}(\varphi_i)$, $\varphi_i \in \Phi_i$, la représentation de $GL(N_i,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle$ obtenue à partir de Π_{ψ_i}, respectivement $I(\varphi_i)$, comme au chapitre 1 section **(1.2.1)**. Dans $\mathcal{R}(GL(N_i,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle)$ on a donc l'égalité,

$$\widetilde{\Pi}_{\psi_i} - \sum_{\varphi_i \in \Phi_i} \epsilon_{\varphi_i}\widetilde{I}(\varphi_i) = \sum_{\tau_i \cong \tau_i^{\theta_{N_i}}} m(\tau_i^+)\tau_i^+ + m(\tau_i^-)\tau_i^- + \sum_{\widetilde{\sigma}_i} m(\widetilde{\sigma}_i)\widetilde{\sigma}_i,$$

où $\tau_i = \tau_i^+|_{GL(N_i,\mathbb{R})} = \tau_i^-|_{GL(N_i,\mathbb{R})}$ définit une représentation irréductible θ_{N_i}-invariante de $GL(N_i,\mathbb{R})$ tel que $\tau_i^-(\theta_N) = -\tau_i^+(\theta_{N_i})$ et chaque $\widetilde{\sigma}_i$ définit une représentations irréductible de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle$ avec $\widetilde{\sigma}_i|_{GL(N_i,\mathbb{R})} = \sigma_i \oplus \sigma_i^{\theta_{N_i}}$, où σ_i est une représenation irréductible non-θ_{N_i}-invariante de $GL(N_i,\mathbb{R})$. Comme par hypothèse,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(\Pi_{\psi_i}) - \sum_{\varphi_i\in\Phi_i} \epsilon_{\varphi_i}\mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(I(\varphi_i)) = 0,$$

on obtient $m(\tau_i^+) = m(\tau_i^-)$. Par conséquent si nous notons, $m(\tau_i) := m(\tau_i^+) = m(\tau_i^-)$, dans $\mathcal{R}(GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_{N_i}\rangle)$,

$$\widetilde{\Pi}_{\psi_i} = \sum_{\varphi_i\in\Phi_i} \epsilon_{\varphi_i}\widetilde{I}(\varphi_i) + \sum_{\tau_i\cong\tau_i^{\theta_{N_i}}} m(\tau_i)(\tau_i^+ + \tau_i^-) + \sum_{\widetilde{\sigma}_i} m(\widetilde{\sigma}_i)\widetilde{\sigma}_i.$$

Considérons maintenant le produit $\Pi_\psi = \times_{j=1}^r \Pi_{\psi_i}$. Dans $\mathcal{R}(M \rtimes \langle\theta_M\rangle)$ on a pour le produit tensoriel $\otimes_{j=1}^r \widetilde{\Pi}_{\psi_i}$ l'égalité,

$$\otimes_{j=1}^r \widetilde{\Pi}_\psi = \bigotimes_{j=1}^r \left(\sum_{\varphi_i\in\Phi_i} \epsilon_{\varphi_i}\widetilde{I}(\varphi_i) + \sum_{\tau_i\cong\tau_i^{\theta_{N_i}}} m(\tau_i)(\tau_i^+ + \tau_i^-) + \sum_{\widetilde{\sigma}_i} m(\widetilde{\sigma}_i)\widetilde{\sigma}_i \right). \tag{3.40}$$

Égalité qui nous permet d'écrire dans $\mathcal{R}(M \rtimes \langle\theta_M\rangle)$,

$$\begin{aligned}\otimes_{j=1}^r \widetilde{\Pi}_{\psi_i} = \sum_{\varphi_1\in\Phi_1} \cdots \sum_{\varphi_r\in\Phi_r} \epsilon_{\varphi_1} \times \cdots \times \epsilon_{\varphi_r} \widetilde{I}(\varphi_1) \otimes \cdots \otimes \widetilde{I}(\varphi_r) + \\ \sum_{\tau_M\cong\tau_M^{\theta_M}} m(\tau_M)(\tau_M^+ + \tau_M^-) + \sum_{\widetilde{\sigma}_M} m(\widetilde{\sigma}_M)\widetilde{\sigma}_M,\end{aligned} \tag{3.41}$$

avec $\tau_M = \tau_M^+|_M = \tau_M^-|_M$ une représentation irréductible θ_M-invariante de M telle que $\tau_M^-(\theta_M) = -\tau_M^+(\theta_M)$ et chaque $\widetilde{\sigma}_M$ une représentation irréductible de $M \rtimes \langle\theta_M\rangle$ avec $\widetilde{\sigma}_M|_M = \sigma_M \oplus \sigma_M^{\theta_M}$, où σ_M est une représentations irréductible non-θ_M-invariante de M. Ainsi on a,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_M}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi_1\in\Phi_1} \cdots \sum_{\varphi_r\in\Phi_r} \epsilon_{\varphi_1} \times \cdots \times \epsilon_{\varphi_r}\epsilon_\varphi \mathrm{Tr}_{\theta_M}(I(\varphi_1) \otimes \cdots \otimes I(\varphi_r)).$$

D'après l'identité **(3.41)** la représentation Π_ψ satisfait dans le groupe de Grothendieck de $GL(N,\mathbb{R})$ l'égalité,

$$\begin{aligned}\Pi_\psi = \sum_{\varphi\in\Phi} \epsilon_\psi I(\varphi) + \sum_{\tau_M\cong\tau_M^{\theta_M}} m(\tau_M)(\mathrm{Ind}_P(\tau_M) + \mathrm{Ind}_P(\tau_M)) \\ + \sum_{\widetilde{\sigma}_M} m(\widetilde{\sigma}_M)(\mathrm{Ind}_P(\sigma_M) \oplus \mathrm{Ind}_P(\sigma_M^{\theta_M})),\end{aligned} \tag{3.42}$$

où $\Phi := \{\varphi = \oplus_{i=1}^r \varphi_i : \varphi_i \in \Phi_i\}$, $\epsilon(\varphi) = \Pi_{i=1}^r \epsilon(\varphi_i)$ et $I(\varphi)$ correspond au module standard de $GL(N,\mathbb{R})$ associé à φ. Rappelons que d'après le lemme **(3.1.2)** pour toute représentation τ_M, respectivement σ_M, qui intervient dans la somme **(3.42)**, l'induite $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)$, respectivement $\mathrm{Ind}_P(\sigma_M)$, est irréductible.

Soit maintenant $\widetilde{\Pi}_\psi$, respectivement $\widetilde{I}(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, la représentation de $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_N\rangle$ obtenue à partir de Π_ψ, respectivement $I(\varphi)$, comme au chapitre 1 section **(1.2.1)**. D'après **(3.42)**, dans le groupe $\mathcal{R}(GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \langle\theta_N\rangle)$, on l'égalité,

$$\widetilde{\Pi}_\psi - \sum_{\varphi\in\Phi} \epsilon_\psi \widetilde{I}(\varphi) = \sum_{\tau_M \cong \tau_M^{\theta_M}} m(\tau_M)^+ \mathrm{Ind}_P(\tau_M)^+ + m(\tau_M)^- \mathrm{Ind}_P(\tau_M)^- + \sum_{\widetilde{\sigma}_M} m(\widetilde{\sigma}_M) \widetilde{\mathrm{Ind}}_P(\sigma_M), \tag{3.43}$$

où $\widetilde{\mathrm{Ind}}_P(\sigma_M)|_{GL(N,\mathbb{R})} = \mathrm{Ind}_P(\sigma_M) \oplus \mathrm{Ind}_P(\sigma_M^{\theta_M})$, $2m(\tau_M) = m(\tau_M)^+ + m(\tau_M)^-$, $\mathrm{Ind}_P(\tau_M) = \mathrm{Ind}_P(\tau_M)^+|_{GL(N,\mathbb{R})} = \mathrm{Ind}_P(\tau_M)^-|_{GL(N,\mathbb{R})}$ et $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)^+(\theta_N) = -\mathrm{Ind}_P(\tau_M)^-(\theta_N)$ avec $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)^+(\theta_N)$ l'opérateur d'entrelacement entre $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)$ et $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)^{\theta_N}$ normalisé comme au chapitre 1 section **(1.2.1)** par le choix d'une fonctionelle de Whittaker.

À la fin de la section précédent on a démontré pour $\pi_M \in \mathcal{E}_\psi$, irréductible et θ_M-invariante que si l'action de θ_M, qu'on représente par A_{π_M}, provient de la normalisation de Whittaker, alors l'action de θ_N sur $\mathrm{Ind}_P(\pi_M)$ définie par l'opérateur, $\mathcal{A}_{\pi_M} \circ \vartheta \circ N(w_M, \underline{0}, \pi_M)$, où on rappelle que $\mathcal{A}_{\pi_M}$ est l'induit de A_{π_M} et $N(w_M, \underline{0}, \pi_M) = r(w_M, \underline{0}) \cdot M(w_M, \underline{0}, \pi_M)$, provient aussi de la normalisation de Whittaker, c'est-à-dire, est équivalent à l'action de θ_N définie au chapitre 1. On fait remarquer que la constante $r(w_M, \underline{0})$ dans la définition de $N(w_M, \underline{0}, \pi_M)$ est la même pour toute π_M, elle ne dépend que de $\otimes_{i=1}^r I(\delta_i, n_i)$. D'après **(3.40)** et **(3.41)** toute représentation τ_M de M qu'intervient dans **(3.41)** est donnée par un produit tensoriel $\tau_M = \otimes_{i=1}^r \tau_{M,i}$ avec chaque $\tau_{M,i}$ un sous-quotient irréductible de $I(\delta_i, n_i)$. La représentation τ_M appartient donc à $\mathcal{E}_\psi$. Soit A_{τ_M} l'opérateur d'entrelacement entre τ_M et $\tau_M^{\theta_M}$ tel que $\theta_M^+(\theta_M) = A_{\tau_M}$, on peut sans perte de généralité supposer que A_{τ_M} provient de la normalisation de Whittaker. Comme on l'a dit plus haut, l'action sur $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)$ définie par l'opérateur $\mathcal{A}_{\tau_M} \circ \vartheta \circ N(w_M, \underline{0}, \tau_M)$ provient de la normalisation de Whittaker, c'est-à-dire $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)^+(\theta_N) = \mathcal{A}_{\tau_M} \circ \vartheta \circ N(w_M, \underline{0}, \tau_M)$. Comme en plus $\theta_M^-(\theta_M) = -\theta_M^+(\theta_M) = -A_{\tau_M}$ on obtient que $\mathrm{Ind}_P(\tau_M)^-(\theta_N) = -\mathcal{A}_{\tau_M} \circ \vartheta \circ N(w_M, \underline{0}, \tau_M)$. Pour l'action définie par $\widetilde{\Pi}_\psi(\theta_N)$, respectivement $\widetilde{I}(\varphi)(\theta_N)$, $\varphi \in \Phi$, on a une égalité analogue, c'est-à-dire, il existe un opérateur d'entrelacement A_ψ entre $\otimes_{i=1}^r \Pi_{\psi_i}$ et $(\otimes_{i=1}^r \Pi_{\psi_i})^{\theta_M}$, respectivement A_φ entre $\otimes_{i=1}^r I(\varphi_i)$ et $(\otimes_{i=1}^r I(\varphi_i))^{\theta_M}$, $\varphi = \oplus_{i=1}^r \varphi_i$, de manière à ce que $\widetilde{\Pi}_\psi(\theta_N) = \mathcal{A}_\psi \circ \vartheta \circ N(w_M, \underline{0}, \otimes_{i=1}^r \Pi_{\psi_i})$, respectivement $\widetilde{I}(\varphi)(\theta_N) = \mathcal{A}_\varphi \circ \vartheta \circ N(w_M, \underline{0}, \otimes_{i=1}^r I(\varphi_i))$. Cette maniere d'exprimer, pour toute représentation qu'intervient dans **(3.43)**, l'action de θ_N, nous permet en regardant l'égalité **(3.43)**, de conclure,

$$\otimes_{j=1}^r \widetilde{\Pi}_{\psi_i} - \sum_{\varphi_1\in\Phi_1} \cdots \sum_{\varphi_r\in\Phi_r} \epsilon_{\varphi_1} \times \cdots \times \epsilon_{\varphi_r} \widetilde{I}(\varphi_1) \otimes \cdots \otimes \widetilde{I}(\varphi_r) = \sum_{\tau_M \cong \tau_M^{\theta_M}} m(\tau_M)^+ \tau_M^+ + m(\tau_M)^- \tau_M^- + \sum_{\widetilde{\sigma}_M} m(\widetilde{\sigma}_M) \widetilde{\sigma}_M.$$

Et pour tout τ_M on obtient de **(3.41)** que,

$$m(\tau_M)^+ = m(\tau_M) = m(\tau_M)^-.$$

Finalement si, $\sigma_M \ncong \sigma_M^{\theta_M}$, alors l'induite $\mathrm{Ind}_P(\sigma_M)$ n'est pas θ_N-invariant et on obtient donc que si,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_M} \left(\sum_{\tau_M \cong \tau_M^{\theta_M}} m(\tau_M)(\tau_M + \tau_M) + \sum_{\widetilde{\sigma}_M} m(\widetilde{\sigma}_M)(\sigma_M \oplus \sigma_M^{\theta_M}) \right) = 0,$$

alors,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}\left(\sum_{\tau_M\cong\tau_M^{\theta_M}} m(\tau_M)(\mathrm{Ind}_P(\tau_M)+\mathrm{Ind}_P(\tau_M))+\sum_{\widetilde{\sigma}_M} m(\widetilde{\sigma}_M)(\mathrm{Ind}_P(\sigma_M)\oplus\mathrm{Ind}_P(\sigma_M^{\theta_M}))\right)=0.$$

Ce qui nous permet, d'après **(3.43)**, de conclure,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi)=\sum_{\varphi\in\Phi}\epsilon_\varphi\mathrm{Tr}_{\theta_N}(I(\varphi)),$$

où chaque trace tordue est définie par rapport à une action de θ_N normalisé avec un modèle de Whittaker de façon comforme a ce que a été fait au chapitre 1. $\square$

Chapitre 4

θ-Resolution dans le cas d'un paramètre élémentaire

Dans tout ce qui suit, soit $\mathbf{G}$ un groupe classique défini sur le corps des réels quasi-déployé et $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G,\ \psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ un paramètre élémentaire de $GL(N)$. L'objectif de ce chapitre est de prouver le lemme **(2.2.1)**. Le chapitre s'organise de la façon suivant, on commence par la preuve du lemme **(2.2.1)** pour ψ avec Π_ψ un caractère quadratique de $GL(N,\mathbb{R})$ ou l'induite d'un caractère quadratique de $GL(N-1,\mathbb{R})$ avec un caractère quadratique de $\mathbb{R}^*$, en fait on montre plus, on donne d'abord la preuve du théorème **(2.2.2)**, qui s'obtient grâce à la structure très particulier des paquets d'Arthur dans le cas présent. Le lemme **(2.2.1)** s'obtient ensuite comme conséquence directe de **(2.2.2)**. La deuxième partie du chapitre est dédié à la preuve de **(2.2.1)** pour Π_ψ une représentation de Speh basée sur une série discréte de $GL(2,\mathbb{R})$.

4.1 Le cas d'un paramètre élémentaire associé a un caractère d'un groupe classique

On commence la section par un exemple qui explique comment la perte de la régularité du caractère infinitésimal entraîne une différence qui nous empêche de prouver le lemme **(2.2.1)** par les mêmes methodes que pour Π_ψ une représentation de Speh basée sur une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$.

Soit $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(2,2)$. Soit $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{A.J}}(\mathbf{G})$ tel que $\mathrm{St} \circ \psi$ est isomorphe à,

$$\mathrm{St} \circ \psi \cong \mathrm{triv} \times R_3 \oplus \mathrm{triv} \times R_1,$$

Où on rappelle que $R_i, i = 1,3$ est la représentations irréductible de dimension i de $SL(2,\mathbb{C})$. Le paquet d'Adams-Johnson associé à ψ_G est constiué par une unique représentation, le caractère trivial, $\mathrm{triv}_{SO(2,2)}$. D'après le Théorème **(5)** section 5 de **[Joh84]** pour $\mathrm{triv}_{SO(2,2)}$ on a la resolution,

$$0 \to \mathrm{triv}_{SO(2,2)} \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 \to 0. \tag{4.1}$$

où,

$$Y_2 = \mathrm{Ind}_{B_{SO(2,2)}(\mathbb{R})}(|\cdot|^1 \times \mathrm{triv}),$$

$B_{SO(2,2)}$ le sous-groupe de Borel de matrices triangulaires inférieures de $\mathbf{SO}(2,2)$,

$$Y_1 := \mathrm{Ind}_{P^+}(\delta(1,0)) \oplus \mathrm{Ind}_{P^-}(\delta(1,0)).$$

où P^+, respectivement P^-, est le sous-groupe parabolique de Levi $GL(2,\mathbb{R})$ de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ contenant le groupe des matrices triangualaires supérieures, respectivement inférieures. Et Y_0 la somme directe des représentations dans le paquet de séries discrètes associé au L-paramètre φ_G de $\mathbf{G}$ avec $\varphi = \mathrm{St}\circ\varphi_G$ défini par,

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (z/|z|) & & \\ & & (z/|z|)^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la correspondance de Langlands attachée à $\psi = \mathrm{St}\circ\varphi_{\psi_G}$ on a la représentation irréductible,

$$\mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3) \times \mathrm{triv}.$$

Tout module standard θ-invariant correspondant à l'un des sous-quotients irréductibles, θ-invariants, du module standard avec $\mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3) \times \mathrm{triv}$ comme unique sous-module irréductible, est donné par une des trois possibilités suivantes,

$$\begin{aligned} X_2 &= |\cdot| \times \mathrm{triv} \times \mathrm{triv} \times |\cdot|^{-1}, \\ X_1 &= \delta(1,0) \times \delta(0,-1), \\ X_0 &= \mathrm{triv} \times \delta(1,-1) \times \mathrm{sgn}. \end{aligned}$$

et il est facile de voir pour tout $i \in [0,2]$ que,

$$\mathrm{Tran}_G^{GL}(Y_i) = X_i.$$

Pour prouver le théorème **(2.2.2)** on a besoin d'obtenir pour la trace tordue de $\mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3)$ $\times\mathrm{triv}$ une expression comme somme de traces tordues des modules standards θ-invariants, c'est-à-dire ils nous faut prouver que dans le groupe de Grothendieck de $GL(4,\mathbb{R})$ on a la possibilité d'écrire,

$$\mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3) \times \mathrm{triv} = X_2 - X_1 + X_0 + R, \tag{4.2}$$

où $\mathrm{Tr}_\theta(R) = 0$. Dans le cas où, attaché à ψ on a une représentation $\mathrm{Speh}(\delta, n)$ basée sur une série discrète δ de $GL(2,\mathbb{R})$, on verra que la somme **(4.2)** s'obtiendra (au moins dans le cas de $GL(2n,\mathbb{R})$, $n = 1,2,3,4$) à partir de la construction d'une resolution θ-exacte par somme de modules standards θ-invariants, ce qui n'est pas possible d'être fait dans la situation présent ; en effet, comme l'application naturel $\phi : X_2 \to X_1$ est surjectif, la suite,

$$0 \to \mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3) \times \mathrm{triv} \to X_2 \xrightarrow{\phi} X_1 \to 0. \tag{4.3}$$

défini un complexe différentiel. Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_1)/\mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3) \times \mathrm{triv}),$$

est non nulle, car X_0 est un sous-quotient de $\ker(\phi_1)/\mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3)\times\mathrm{triv}$, et pour $\mathrm{Speh}(\mathrm{triv}, 3)$ $\times\mathrm{triv}$ on ne peut pas construire une suite θ-exacte. Le methode à suivre pour obtenir **(4.2)** devra être différent à celle de construire une suite θ-exacte.

Prenons maintenant $\psi = \mathbf{St}\circ\psi_G$, $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$, un paramêtre élémentaire de $GL(N)$, tel que Π_ψ est donnée par un caractère quadratique de $GL(N,\mathbb{R})$ ou l'induite d'un caractère quadratique de $GL(N-1,\mathbb{R})$ avec un caractère quadratique de $\mathbb{R}$

Le paquet d'Arthur de ψ_G a été defini au chapitre deux, théorème **(2.1.1)**. Dans ce cas particulier on a pour $\Pi(\psi_G)$ le résultat suivant,

Lemme 4.1.1. *Le paquet d'Arthur* $\Pi(\psi_G)$ *de* ψ_G *est réduit à un élément, un caractère* π_{ψ_G}*.*

Preuve. On calcule explicitement le paramètre de Langlands φ_{ψ_G}. Dans le cas où $\mathbf{G}$ est donné par $\mathbf{SO}(p,q)$, $p-q=1$, c'est celui de la représentation triviale. Dans autres cas, c'est celui de la représentation triviale ou du caractère du groupe orthogonal $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ trivial sur la composante neutre et valant -1 sur l'autre. Il suffit dans tous les cas de traiter le cas de représentation triviale, les paquets étant préservé par tensorisation par un caractère. Le paquet $\Pi(\psi_G)$ contient donc, car le paquet de Langlands associé à φ_{ψ_G} est un sous-ensemble de $\Pi(\psi_G)$, la représentation triviale, et toutes les autres représentation de ce paquet ont même caractère infinitésimal que celle-ci. Soit $\pi \in \Pi(\psi_G)$. On globalise la situation sur $\mathbb{Q}$ en considérant le paramètre global donné par un $\mathbf{SL}(2)$ régulier dans $\widehat{\mathbf{G}}$. En toute place, la représentation triviale est dans le paquet local associé à ce paramètre. Considérons la représentations global dont la composante locale à toute les places finies est la représentation triviale sauf à la place archimédiene elle est égale à π. D'après le théorème **(1.5.2)** de **[Art13]** cette représentation globale intervient dans la partie discrète de la formule des traces. Elle donne nécessairement une représentation de carré intégrable du groupe des adèles, $\mathbf{G}(\mathbb{A})$. Donc elle se réalise dans l'ensemble des fonctions de carré intégrable. Mais une fonction invariante à gauche sous $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et invariante sous l'action du groupe en toute place sauf une est nécessairement une fonction constante. Donc π est la représentation triviale. □

Cette structure très particulier du paquet est l'élément clé pour prouver le théorème **(2.2.2)**.

Preuve, Théorème (2.2.2). Comme le paquet de Langlands associé à φ_{ψ_G} est à la fois un sous-ensemble de $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ et $\Pi(\psi_G)$, on obtient, car $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ se réduit aussi à un élément, que $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G} = \Pi(\psi_G) = \{\pi_{\psi_G}\}$ et du théorème **(2.1.1)** on peut écrire l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \mathrm{Tran}_G^{GL}(\pi_{\psi_G}). \tag{4.4}$$

Ce qui prouve **(2.2.2)** pour ψ un paramètre élémentaire avec Π_ψ un caractère quadratique de $GL(N,\mathbb{R})$ ou l'induite d'un caractère quadratique de $GL(N-1,\mathbb{R})$ avec un caractère quadratique de $\mathbb{R}^*$. □

Le lemme **(2.2.1)** s'obtient comme conséquence directe de la égalité **(4.4)**. En effet ;

Preuve, Lemme (2.2.1). D'après le corollaire **(8.9)** de **[AJ87]** il existe un ensemble fini Φ_G des L-paramètres de $\mathbf{G}$, de manière à ce que π_{ψ_G} puisse être exprimé comme une somme stable de modules standards de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ donnée par,

$$\pi_\psi = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\psi_G)-l(\varphi_G)} \Theta_{\varphi_G}, \tag{4.5}$$

où Θ_{φ_G} est la somme des représentations dans le pseudo-paquet Π_{φ_G} associé à φ_G, $l(\psi_G)$ la longueur de Vogan du module standard qui a π_{ψ_G} comme unique sous-module irréductible et $l(\varphi_G)$ la longueur de Vogan de Π_{φ_G}. Au chapitre deux on a expliqué comme transférer à $GL(N,\mathbb{R}) \rtimes \theta_N$ la trace du module standard stable Θ_{φ_G}, c'est égal à la trace tordue du module standard θ_N-invariant associé au L-paramètre de $GL(N)$, $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$. D'après **(4.5)** pour le transfert tordu de π_{ψ_G} on a l'égalité,

$$\mathrm{Tran}_G^{GL}(\pi_\psi) = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\psi_G)-l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G})$$

et grâce à **(4.4)** on obtient,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi_G \in \Phi_G} (-1)^{l(\psi_G)-l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}).$$

On a ainsi montré le lemme **(2.2.1)** avec $\Phi = \{\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G : \varphi_G \in \Phi_G\}$ et $\epsilon_\varphi = (-1)^{l(\psi_G)-l(\varphi_G)}$, $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$. □

4.2 Le cas d'un module de Speh basé sur une série discrète

Soit $\psi = \mathbf{St} \circ \psi_G$, $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$, un paramètre élémentaire de $GL(N)$, N pair, tel que Π_ψ est donnée par une représentation de Speh, $\mathrm{Speh}(\delta, n)$, $n := N/2$, basée sur une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$ de caractère infinitésimal $(p/2, -p/2)$, $p \in \mathbb{Z}_{>0}$. On rappelle que la représentation $\mathrm{Speh}(\delta, n)$ est l'unique sous-module irréductible du module standard,

$$I(\delta, n) = \delta(m_1, -m_n) \times \cdots \times \delta(m_n, -m_1),$$

où l'induite est pris par rapport au sous-groupe parabolique de Lévi $\Pi_{j=1}^n GL(2,\mathbb{R})$ contenant le groupe de matrices triangulaires inférieurs de $GL(2n,\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [1, n]$,

$$m_i = \frac{p}{2} + \frac{n-1}{2} + 1 - i. \tag{4.6}$$

Pour prouver le lemme **(2.2.1)** il nous faut un calcul de Π_ψ à l'aide de modules standards θ_N-invariants, on s'appuira pour cela sur la resolution construite par J. Johnson (Voir **[Joh84]** chapitre 6 théorème **(1)**). Pour $\mathrm{Speh}(\delta, n)$ on a donc une résolution par des sommes directes de modules standards de $GL(N,\mathbb{R})$ donnée par,

$$0 \to \mathrm{Speh}(\delta, n) \to I(\delta, n) \to \cdots \to Y_j \to Y_{j-1} \to \cdots \to Y_0 \to 0. \tag{4.7}$$

où chaque Y_j est une somme directe de modules standards de $GL(N,\mathbb{R})$ avec longueur de Vogan égal à j. En plus, d'après la proposition **(3.1.1)**, il existe une bijection entre l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, n\}$ et l'ensemble des modules standards intervenant dans **(4.7)** et il est facile de voir que le module standard est θ_N-invariant si et seulement si la permutation associée est involutive. Tout module standard intervenant dans **(4.7)** a une longueur définie par Vogan, on transformera au cours du chapitre cette notion de longueur en une notion de θ-longueur sur les modules standards θ_N-invariants. Notons par X_j la somme directe des modules standards θ_N-invariants devant intervenir et de θ-longueur j. Chaque module standard considéré a une action de θ_N que l'on normalise avec un modèle de Whittaker comme au chapitre 1. Ainsi chaque X_i a une action de θ_N, notée $A_i(\theta_N)$. Soit l_θ la θ-longueur de $I(\delta, n)$ notre objectif est de montrer,

$$\mathrm{Tr}(\Pi_\psi(f) A_{\theta_N}) = \sum_{i=0}^{l_\theta} (-1)^{l_\theta - i} \mathrm{Tr}(\pi_{X_i}(f) A_i(\theta_N)).$$

On aura ainsi prouvé le lemme **(2.2.1)** avec Φ l'ensemble constitué par tout L-paramètre $\varphi : W_\mathbb{R} \to GL(N,\mathbb{C})$ tel que $I(\varphi)$, le module standard associé, est θ_N-invariant et intervient dans **(4.7)** et ϵ_φ égal à $(-1)^{l_\theta - l_\theta(\varphi)}$, où $l_\theta(\varphi)$ définit la θ-longueur de $I(\varphi)$. En fait, on veut montrer un peut plus, on veut construire des morphismes de $X_i \to X_{i+1}$ pour tout i de façon à former un complexe différentiel,

$$0 \to \Pi_\psi \to X_{l_\theta} \to \cdots \to X_i \to X_{i-1} \to \cdots \to X_0 \to 0. \tag{4.8}$$

Ce complexe doit généraliser celui de Johnson dans le cas non tordu mais il n'est certainement pas exact. Il doit être θ-exact, c'est-à-dire que la trace tordue des noyaux modulo les images des flèches est nulle.

Le reste du chapitre s'organise de la manière suivante. On commence par prouver une série de propriétés combinatoires de l'ensemble de modules standards intervenant dans la resolution de Π_ψ, Ensuite, en s'appuyant sur ces propriétés combinatoires on donnera le pas a suivre pour construire le complexe différentiel **(4.8)**. On finit avec une preuve de la θ-exactitude de **(4.8)** dans le cas de $GL(2n,\mathbb{R}),\ n \leq 4$.

4.2.1 Propriétés combinatoires de l'ensemble des modules standards

On se place dans un contexte un peu plus général que celui qui a été introduit au début de **4.2**. Au lieu de considérer l'ensemble défini par la formule **(4.6)**, prenons une suite, $m_1 > \cdots > m_n$, de demi-entiers tel que, pour toute paire $1 \leq i < j \leq n$, la somme $m_i + m_j$ est un entier. À toute permutation $\sigma : [1,n] \to [1,n]$, $\sigma(i) = i'$ associons l'ensemble suivant de séries discrètes (modulo le centre) de $GL(2,\mathbb{R})$,

$$\gamma := \{\delta(m_i, -m_{i'})\}_{i=1}^{n}. \tag{4.9}$$

Definition 4.2.1. *Pour σ une permutation de $[1,n]$ soit $\gamma = \{\delta(m_i, -m_{\sigma(i)})\}_{i=1}^{n}$. On dit pour tout ensemble γ' défini par **(4.9)** que $\gamma' \prec \gamma$ s'il existe une paire $j,\ t,\ 1 \leq j < t \leq n$ avec $m_{j'} < m_{t'}$ et une permutation,*

$$\begin{aligned} \kappa &: [1,n] \to [1,n], \\ \kappa(j') &= t', \\ \kappa(k) &= \sigma(k),\ k \neq j', t', \end{aligned}$$

tel que dans γ il n'y a pas des séries discrètes $\delta(m_k, -m_{k'}),\ 1 \leq k \leq n$ avec $m_j > m_k > m_t$, $m_{j'} < m_{k'} < m_{t'}$, et,

$$\gamma' = \{\delta(m_1, -m_{\sigma(1)}), \cdots, \delta(m_j, -m_{t'}), \cdots, \delta(m_t, -m_{j'}), \cdots, \delta(m_n, -m_{\sigma(n)})\}.$$

Notons,

$$d = \{\delta(m_j, -m_{j'}), \delta(m_t, -m_{t'})\},$$

et,

$$c = \{\delta(m_j, -m_{t'}), \delta(m_t, -m_{j'})\},$$

Alors on écrit,

$$\gamma' = (\gamma \setminus d) \cup c.$$

Finalement on dit que $\gamma' < \gamma$, s'il existe une suite , $\gamma' = \gamma_0, \cdots, \gamma_k = \gamma$, tel que,

$$\gamma' = \gamma_0 \prec \gamma_1 \prec \cdots \prec \gamma_{k-1} \prec \gamma_k = \gamma.$$

Associé a tout élément γ, on a un élément du groupe de Grothendieck de $GL(2n,\mathbb{R})$ que nous définissons maintenant ;

Definition 4.2.2. *Soit* $\gamma = \{\delta(m_i, -m_{i'})\}_{i=1}^n$ *et considérons une bijection* $i_{(\cdot)} : [1, n] \to [1, n]$ *tel que,*

$$m_{i_1} - m_{i'_1} \geq \cdots \geq m_{i_n} - m_{i'_n}.$$

À tout ensemble $\gamma = \{\delta(m_i, -m_{i'})\}_{i=1}^n$ *on associe la classe dans le groupe de Grothendieck de* $GL(2n, \mathbb{R})$*, du module standard* $I(\gamma)$ *défini par,*

$$I(\gamma) = \delta(m_{i_1}, -m_{i'_1}) \times \cdots \times \delta(m_{i_n}, -m_{i'_n}),$$

où l'induite est pris par rapport au sous-groupe parabolique de Lévi $\Pi_{j=1}^n GL(2, \mathbb{R})$ *contenant le groupe de matrices triangulaires inférieurs de* $GL(2n, \mathbb{R})$.

Notons que si pour une paire γ, γ' on a $\gamma < \gamma'$ alors $\overline{I(\gamma)}$, l'unique sous-module irréductible de $I(\gamma)$, est un sous-quotient de $I(\gamma')$ (Voir lemme **(4.2.6)**).

Sur tout ensemble γ définissons le suivant concept de longueur ;

Definition 4.2.3. *Pour,*

$$\gamma = \{\delta(m_i, -m_{i'})\}_{i=1}^n,$$

définissons l'ensemble,

$$\mathcal{E}(\gamma) := \{(\delta(m_i, -m_{i'}); \delta(m_j, -m_{j'})) : m_i > m_j \text{ et } m_{i'} < m_{j'} \ , i < j\}.$$

Alors la longueur, $l(\gamma)$*, de* γ*, se définit comme la cardinalité de* $\mathcal{E}(\gamma)$*. Il est facile de voir que la longuer de Vogan de l'induite* $I(\gamma)$ *associé à* γ *est égale à* $l(\gamma)$.

Pout tout série discrète $\delta(m, -m')$ notons $\theta\delta(m, -m') := \delta(m', -m)$ et définissons pour $\gamma = \{\delta(m_i, -m_{i'})\}_i^n$ l'ensemble $\theta \cdot \gamma$ par,

$$\theta\gamma = \{\theta\delta(m_i, -m_{i'})\}.$$

On dit que γ est θ-invariant si et seulement si $\theta\gamma = \gamma$. Il est evident de la définition du module standard $I(\gamma)$ que $I(\gamma)$ est θ_N-invariant si et seulement si γ est θ-invariant.

Definition 4.2.4. *Soit,*

$$\gamma = \{(m_i - m_{i'})\}_{i=1}^n,$$

θ*-invariant. On définit la* $\theta-$*longueur,* $l_\theta(\gamma)$*, de* γ*, comme la cardinalité de l'ensemble des orbites de* θ *dans* $\mathcal{E}(\gamma)$.

On a entre la longueur et la θ-longueur, l'identité suivante.

Lemme 4.2.1. *Soit* $\gamma = \{\delta(m_i - m_{i'})\}_{i=1}^n$ θ*-invariant. Notons par* $C(\gamma)$ *le nombre de points fixes dans* $\mathcal{E}(\gamma)$*. Alors la* θ*-longueur de* γ *est donnée par la formule,*

$$l_\theta(\gamma) = \frac{l(\gamma) + C(\gamma)}{2}. \tag{4.10}$$

Preuve. Si l'élément $a_{i,j} = \{\delta(m_i - m_{i'}); \delta(m_j - m_{j'})\} \in \mathcal{E}(\gamma)$ n'est pas un point fixe sous l'action de θ dans $\mathcal{E}(\gamma)$, la cardinalité de l'orbite de $a_{i,j}$ sous la action de θ est égale à deux. Par conséquent, la cardinalité de $\mathcal{E}(\gamma)$ est égal à $2l_\theta(\gamma) - C(\gamma)$ d'où on conclut,

$$l_\theta(\gamma) = \frac{l(\gamma) + C(\gamma)}{2}.$$

□

Notons maintenant par $D(\gamma)$ la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes $\delta(m_i, -m_{i'})$ avec $i = i'$ dans γ. On a pour n, l'égalité,

$$n = 2C(\gamma) + D(\gamma).$$

Cette égalité et l'equation **(4.10)** nous permettent d'écrire,

$$l_\theta(\gamma) = \frac{l(\gamma) + \frac{1}{2}(n - D(\gamma))}{2}. \tag{4.11}$$

Lemme 4.2.2. *Soient γ et γ', $\theta-$invariants. Supposons que $\gamma' < \gamma$ et $l_\theta(\gamma') = l_\theta(\gamma) - 1$, alors $l(\gamma) - l(\gamma') \leq 3$.*

Preuve. L'équation **(4.11)** nous donne l'égalité,

$$l(\gamma) - l(\gamma') = 2 + \frac{1}{2}(D(\gamma) - D(\gamma')),$$

Supposons que $l(\gamma) - l(\gamma') = d > 3$. Par conséquent, $D(\gamma) - D(\gamma') = 2(d-2)$ et dans γ on peut trouver $2(d-2)$ éléments de la forme $\delta(m_s, -m_s)$, $1 \leq s \leq n$, qui n'appartiennent pas à γ'. Soit,

$$\gamma := \gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_{d-1} > \gamma_d := \gamma',$$

où $l(\gamma_i) = l(\gamma_i + 1) + 1$, une suite qui conduit de γ à γ'. Prenons un élément $\delta(m_s, -m_s)$ contenu dans γ mais non dans γ'. Soit γ_j, $0 \leq j < d$, tel que $\delta(m_s, -m_s) \in \gamma_j \setminus \gamma_{j+1}$. Comme pour toute paire de séries discrètes $\delta(m_s, -m_s)$ et $\delta(m_{s'}, -m_{s'})$ la représentation $\delta(m_s, -m_s) \times \delta(m_{s'}, -m_{s'})$ est irréductible, pour faire disparaître $\delta(m_s, -m_s)$ il faut qu'il existe dans γ_j une série discrète $\delta(m_k, -m_{k'})$, $k \neq k'$ de manière à ce que la représentation $\delta(m_k, -m_{k'}) \times \delta(m_s, -m_s)$ soit réductible. On ne peut donc pas faire disparaître deux séries discrètes θ-invariantes en un seul mouvement, par conséquent, pour aller de γ à γ' on a besoin d'au moins $2(d-2)$ mouvements, un pour chaque série discrète θ-invariante non contenue dans γ'. Pour tout ensemble des séries discrètes α on définit,

$$N(\alpha) := \{\delta \in \alpha : \theta \cdot \delta \notin \alpha\}$$

À chaque fois qu'on passe de $\delta(m_s, -m_s) \times \delta(m_k, -m_{k'})$, $k \neq k'$, à $\delta(m_s, -m_{k'}) \times \delta(m_k, -m_s)$ la cardinalité de l'ensemble $N(\gamma_{j+1})$ augmente par rapport à la cardinalité de $N(\gamma_j)$ de trois, si $\delta(m_{k'}, -m_k)$, appartient à γ_j ou d'un, si $\delta(m_{k'}, -m_k)$ n'appartient pas à γ_j. L'élément γ_{i+1} n'est donc pas θ-invariant, ce qui nous donne, car γ' est θ-invariant, à minimum de $2(d-2)+1$ mouvement pour aller de γ à γ'. Finalement comme $d \geq 2(d-2)+1$ si et seulement si $d \leq 3$, on conclut que, $l(\gamma) - l(\gamma') \leq 3$. □

Lemme 4.2.3. *Soient γ et γ' tels que $\gamma' < \gamma$ et $l(\gamma') = l(\gamma) - 2$. Alors, ils existent exactement deux ensembles γ_1 et γ_2 tels que $\gamma' < \gamma_i < \gamma$, $i = 1, 2$. Si en plus on suppose que γ et γ' sont θ-invariants entre γ_1 et γ_2 on aura la relation $\gamma_2 = \theta \cdot \gamma_1$.*

Preuve. Soit γ_1 tel que $\gamma' < \gamma_1 < \gamma$ et $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 1$. Il existe un sous-ensemble, d_1 de γ, donné par,

$$d_1 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j'_1}), \delta(m_{t_1}, -m_{t'_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{t_1}$, $m_{j'_1} < m_{t'_1}$, tel que si nous notons,

$$c_1 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{t'_1}), \delta(m_{t_1}, -m_{j'_1})\},$$

pour γ_1 on a l'égalité,

$$\gamma_1 = (\gamma \setminus d_1) \cup c_1.$$

Comme en plus $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 1$, dans γ, n'existent pas de séries discrètes $\delta(m_k, -m_{k'})$, $1 \leq k \leq n$, telles que,

$$m_{j_1} > m_k > m_{t_1} \quad \text{et} \quad m_{j_1'} < m_{k'} < m_{t_1'}. \tag{4.12}$$

De manière analogue on construit γ', mais cette fois-ci à partir de γ_1. Plus explicitement, dans γ_1 il existe un sous-ensemble d_2, qui satisfait des propriété analogues à d_1 mais avec γ_1 à la place de γ, à partir duquel on construit un ensemble $c_2 < d_2$ tel que,

$$\gamma' = (\gamma_1 \setminus d_2) \cup c_2.$$

Soient d et c avec d un sous-ensemble de γ et $c < d$ une paire d'ensembles définis de manière analogue à d_1 et c_1. Supposons en plus que d n'est pas un sous-ensemble de $d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$. Il est alors évident pour tout module standard $\alpha = (\gamma \setminus d) \cup c$, que le nombre de permutations à faire dans α pour aller jusqu'à γ' doit être plus grand que 1, donc $\alpha \not> \gamma'$. Par conséquent, le problème de savoir quel est le nombre de modules standard entre γ et γ' se ramène au problème de savoir quel est le nombre de modules standard entre $d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$ et $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$.

Si $d_2 \cap c_1 = \emptyset$, il est clair que $d_1 \cup c_2$ et $c_1 \cup d_2$, sont les seuls deux modules standard entre $d_1 \cup d_2$ et $c_1 \cup c_2$, par conséquent $(\gamma \setminus d_1) \cup c_1$ et $(\gamma \setminus d_1) \cup c_1$, sont les seuls deux modules standard entre γ et γ'.

Dans tout la suite on suppose $d_2 \cap c_1 \neq \emptyset$. On a les possibilités suivantes,

1.)

$$d_1 \cup (d_2 \setminus c_1) = \{\delta(m_j, -m_{j'}), \delta(m_t, -m_{t'}), \delta(m_q, -m_{q'})\}$$

où $m_j > m_t > m_q$ et $l \neq l'$ au moins pour deux entiers de $\{j, t, q\}$.

1.a) Si $m_{j'} < m_{t'} < m_{q'}$, pour $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on a les deux possibilités suivantes,

$$[(c_1 \setminus d_2) \cup c_2]^1 = \{\delta(m_j, -m_{t'}), \delta(m_t, -m_{q'}), \delta(m_q, -m_{j'})\}$$
$$[(c_1 \setminus d_2) \cup c_2]^2 = \{\delta(m_j, -m_{q'}), \delta(m_t, -m_{j'}), \delta(m_q, -m_{t'})\}$$

et on peut après inspection conclure qu'entre $d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$ et $[(c_1 \setminus d_2) \cup c_2]^k$, $k = 1, 2$ on trouve uniquement,

$$\gamma_1 = \{\delta(m_j, -m_{t'}), \delta(m_t, -m_{j'}), \delta(m_q, -m_{q'})\},$$
$$\gamma_2 = \{\delta(m_j, -m_{j'}), \delta(m_t, -m_{q'}), \delta(m_q, -m_{t'})\}.$$

1.b) Si $m_{j'} < m_{q'} < m_{t'}$, pour $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on a l'égalité suivante,

$$(c_1 \setminus d_2) \cup c_2 = \{\delta(m_j, -m_{t'}), \delta(m_t, -m_{q'}), \delta(m_q, -m_{j'})\}$$

et on peut après inspection conclure qu'entre $d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$ et $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on trouve uniquement,

$$\gamma_1 = \{\delta(m_j, -m_{t'}), \delta(m_t, -m_{j'}), \delta(m_q, -m_{q'})\},$$
$$\gamma_2 = \{\delta(m_j, -m_{q'}), \delta(m_t, -m_{t'}), \delta(m_q, -m_{j'})\}.$$

1.c) Si $m_{t'} < m_{j'} < m_{q'}$, pour $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on a l'égalité suivante,

$$(c_1 \setminus d_2) \cup c_2 = \{\delta(m_j, -m_{q'}), \delta(m_t, -m_{j'}), \delta(m_q, -m_{t'})\}$$

et on peut après inspection conclure qu'entre $d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$ et $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on trouve uniquement,

$$\gamma_1 = \{\delta(m_j, -m_{j'}), \delta(m_t, -m_{q'}), \delta(m_q, -m_{t'})\},$$
$$\gamma_2 = \{\delta(m_j, -m_{q'}), \delta(m_t, -m_{t'}), \delta(m_q, -m_{j'})\}.$$

2.)

$$d_1 \cup (d_2 \setminus c_1) = \{\delta(m_j, -m_{j'}), \delta(m_t, -m_t), \delta(m_q, -m_q)\}$$

où $m_j > m_t > m_q > m_{j'}$. Pour $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on a l'égalité suivante,

$$(c_1 \setminus d_2) \cup c_2 = \{\delta(m_j, -m_t), \delta(m_t, -m_q), \delta(m_q, -m_{j'})\}$$

et on peut après inspection conclure qu'entre $d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$ et $(c_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on trouve uniquement,

$$\gamma_1 = \{\delta(m_j, -m_t), \delta(m_t, -m_{j'}), \delta(m_q, -m_q)\},$$
$$\gamma_2 = \{\delta(m_j, -m_q), \delta(m_t, -m_t), \delta(m_q, -m_j)\}.$$

Le cas où $d_1 \cup (d_2 \setminus c_1) = \{\delta(m_j, -m_j), \delta(m_t, -m_t), \delta(m_q, -m_{q'})\}$ avec $m_{q'} > m_j > m_t > m_q$ se fait de manière analogue.

La dernière partie de l'énoncé du lemme s'obtient du fait que si γ et γ sont θ-invariants et $\gamma < \gamma_1 < \gamma'$ alors $\gamma < \theta \cdot \gamma_1 < \gamma'$ et comme entre γ et γ' il n'y a que deux modules standards on conclut $\gamma_2 = \theta \cdot \gamma_1$. □

Lemme 4.2.4. *Soient γ et γ', θ-invariants. Supposons que $l(\gamma') = l(\gamma) - 3$ et $l_\theta(\gamma') = l_\theta(\gamma) - 1$. Alors $\gamma' < \gamma$ si et seulement si existe un sous-ensemble d de γ, donné par,*

$$d := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i'_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i'_1}, -m_{i_1})\},$$

où $m_{i_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{i'_1}$, tel que dans γ, n'existent pas de séries discrètes $\delta(m_t, -m_{t'})$ $1 \leq t \leq n$ qui satisfont une des conditions suivantes,

$$m_{i_1} > m_t > m_{i_2} \text{ et } m_{i'_1} < m_{t'} < m_{i_2},$$
$$m_{i_3} > m_t > m_{i'_1} \text{ et } m_{i_3} < m_{t'} < m_{i_1},$$
$$m_{i_2} > m_t > m_{i_3} \text{ et } m_{i'_1} < m_{t'} < m_{i_1}.$$

Si cette propriété est remplie par γ, pour γ' on a l'égalité,

$$\gamma' = (\gamma \setminus d) \cup \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i'_1}), \delta(m_{i'_1}, -m_{i_3})\}.$$

Preuve. Comme $l(\gamma') = l(\gamma) - 3$ et $l_\theta(\gamma') = l_\theta(\gamma) - 1$ on peut trouver une paire d'ensembles non-θ invariants γ_1, γ_2 avec $\gamma' < \gamma_2 < \gamma_1 < \gamma$ et $l(\gamma) = l(\gamma_1) + 1 = l(\gamma_2) + 2$. Alors il existe un sous-ensemble, d_1 de γ, donne par,

$$d_1 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j'_1}), \delta(m_{t_1}, -m_{t'_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{t_1}$, $m_{j'_1} < m_{t'_1}$, tel que si nous notons,

$$c_1 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{t'_1}), \delta(m_{t_1}, -m_{j'_1})\},$$

γ_1 est donné par l'égalité,

$$\gamma_1 = (\gamma \setminus d_1) \cup c_1.$$

Comme en plus $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 1$, dans γ n'existent pas de séries discrètes $\delta(m_k, -m_{k'})$, $1 \leq k \leq n$, telles que $m_{j_1} > m_k > m_{t_1}$, $m_{j'_1} < m_{k'} < m_{t'_1}$.

De manière analogue on construit γ_2, mais cette fois-ci à partir de γ_1. C'est-à-dire, il existe un sous ensemble d_2 de γ_1 avec les mêmes propriétés que d_1 mais avec γ_1 à la place de γ et $c_2 < d_2$ tel que,

$$\gamma_2 = (\gamma_1 \setminus d_2) \cup c_2.$$

Supossons d'abord que tout élément inclus dans d_1 n'est pas θ-invariant, comme γ_1 n'est pas θ-invariant, on sait que $\delta(m_{j_1}, -m_{j'_1}) \neq \theta \cdot \delta(m_{t_1}, -m_{t'_1})$. Par conséquent, dans γ_1 on a quatre séries discrètes (modulo le centre), δ, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_1$. Si en plus nous supposons $d_2 \cap c_1 = \emptyset$, alors,

$$\gamma_2 = \gamma \setminus (d_1 \cup d_2) \cup c_1 \cup c_2$$

et du fait que γ_2 n'est pas θ-invariant et $l_\theta(\gamma) = l_\theta(\gamma') + 1$ on obtient $d_2 \neq \theta \cdot d_1$ et $d_2 \neq \theta \cdot d_2$. Si $d_2 \cap \theta \cdot d_1 = \emptyset$, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à huit si tout élément inclus d_2 n'est pas θ-invariant ou égal à sept s'il y en a un qui l'est. Par contre si $d_2 \cap \theta \cdot d_1 \neq \emptyset$ la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à six si l'élément contenu dans $d_2 \setminus \theta \cdot d_1$ n'est pas θ-ivariant ou égal à cinq s'il en est. Dans tous le cas on conclut que, tout module standard γ' tel que $\gamma' < \gamma_2$ et $l(\gamma') = l(\gamma_2) - 1$ ne peut pas être θ-invariant.
On peut donc supposer que $d_2 \cap c_1 \neq \emptyset$. Pour γ_2 on a l'égalité,

$$\gamma_2 = [(\gamma \setminus d_1) \setminus (d_2 \setminus c_1)] \cup [(c_1 \setminus d_2) \cup c_2].$$

Si $d_2 \cap \theta \cdot d_1 = \emptyset$, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à six si l'élément contenu dans $d_2 \setminus c_1$ n'est pas θ-ivariant ou égal à cinq s'il en est. Dans les deux cas on conclut que, tout module standard γ' tel que $\gamma' < \gamma_2$ et $l(\gamma') = l(\gamma_2) - 1$ ne peut pas être θ-invariant. Si $d_2 \cap \theta \cdot d_1 \neq \emptyset$, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à trois ou quatre. Ce dernier ensemble est constitué par les séries discrètes non θ-invariantes de $c_2 \cup (c_1 \setminus d_2)$ et par celle qui est dans $\theta \cdot d_1 \setminus d_2$. Par conséquent, si on veut obtenir un module standard θ-invariant $\gamma' < \gamma_2$ tel que $l(\gamma') = l(\gamma_2) - 1$ il faudra que on puisse faire une permutation entre deux de ces trois, respectivement quatre, éléments. Ce qui permet de ramener le problème à celle de savoir si dans $GL(8, \mathbb{R})$ on peut trouver un module standard θ-invariant γ constitué par quatre séries discrètes non θ-invariants et un module standard θ-invariant γ' tel que $\gamma' < \gamma$, $l(\gamma') = l(\gamma) - 3$ et $l_\theta(\gamma') = l_\theta(\gamma) - 2$. Mais dans la section **(4.2.5)** on verra que dans $GL(8, \mathbb{R})$ n'existent pas des modules standard γ et γ' avec les propriétés énoncées.

On peut donc supposer dans ce qui suit, que l'ensemble d_1 contient une élément θ-invariant, par conséquent dans γ_1 il y a trois séries discrètes (modulo le centre), δ, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_1$. On considère d'abord le cas où $d_2 \cap c_1 = \emptyset$. Si $d_2 \cup \theta \cdot d_1 = \emptyset$, comme $l_\theta(\gamma) = l_\theta(\gamma') + 1$, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à sept si tout élément inclus dans d_2 n'est pas θ-invariant ou égal à six s'il y en a un qui l'est. Comme avant on conclut que tout module standard γ' tel que $\gamma' < \gamma_2$ et $l(\gamma') = l(\gamma_2) - 1$ ne peut pas être θ-invariant.

Si maintenant on suppose que $d_2 \cap \theta \cdot d_1 \neq \emptyset$ et tout élément inclus dans d_2 n'est pas θ-invariant, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à cinq et on peut encore une fois conclure que, tout module standard γ' tel que $\gamma' < \gamma_2$ et $l(\gamma') = l(\gamma_2) - 1$ ne peut pas être θ-invariant.

Si à présent $d_2 \cap \theta \cdot d_1 \neq \emptyset$, et l'élément contenu dans $d_2 \setminus \theta \cdot d_1$ est θ-invariant, dans γ_2, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à quatre. Par conséquent, si on veut obtenir un ensemble θ-invariant $\gamma' < \gamma_2$ tel que $l(\gamma') = l(\gamma_2) - 1$, il faudra que on puisse faire une permutation entre deux de ces quatre éléments. Alors, pour qu'il existe γ' il faut d'abord que dans $GL(8, \mathbb{R})$ on puisse trouver α un module standard θ-invariant constitué par deux séries discrètes θ-invariantes et deux séries discrètes non θ-invariants et un module standard θ-invariant $\alpha' < \alpha$ tel que $l(\alpha') = l(\alpha) - 3$ et $l_\theta(\alpha') = l_\theta(\alpha)$. Comme on peut voir dans la section **(4.2.5)** il existe dans, $GL(8, \mathbb{R})$, α et α' avec les propriétés énoncées ci-dessus si et seulement si,

$$\alpha = \{\delta(m_1, -m_4), \delta(m_2, -m_2), \delta(m_3, -m_3), \delta(m_4, -m_1)\},$$

où $m_1 > m_2 > m_3 > m_4$. Comme d_1 est constiué par une série discrète θ-invariante et une serie discrète non θ-invariante, dans $GL(8, \mathbb{R})$ on a pour $(\alpha \setminus d_1) \cup c_1$ les posibilités,

$$\begin{aligned}
\alpha_1^1 &= \{\delta(m_1, -m_2), \delta(m_2, -m_4), \delta(m_3, -m_3), \delta(m_4, -m_1)\}, \\
\alpha_1^2 &= \{\delta(m_1, -m_3), \delta(m_2, -m_2), \delta(m_3, -m_4), \delta(m_4, -m_1)\}, \\
\alpha_1^3 &= \{\delta(m_1, -m_4), \delta(m_2, -m_1), \delta(m_3, -m_3), \delta(m_4, -m_2)\}, \\
\alpha_1^4 &= \{\delta(m_1, -m_4), \delta(m_2, -m_2), \delta(m_3, -m_1), \delta(m_4, -m_3)\}
\end{aligned}$$

et comme $d_2 \cap \theta \cdot d_1 \neq \emptyset$ on a respectivement pour $(\alpha_1 \setminus d_2) \cup c_2$ les posibilités,

$$\begin{aligned}
\alpha_2^1 &= \{\delta(m_1, -m_2), \delta(m_2, -m_4), \delta(m_3, -m_1), \delta(m_4, -m_3)\}, \\
\alpha_2^2 &= \{\delta(m_1, -m_3), \delta(m_2, -m_1), \delta(m_3, -m_4), \delta(m_4, -m_2)\}, \\
\alpha_2^3 &= \{\delta(m_1, -m_3), \delta(m_2, -m_1), \delta(m_3, -m_4), \delta(m_4, -m_2)\}, \\
\alpha_2^4 &= \{\delta(m_1, -m_2), \delta(m_2, -m_4), \delta(m_3, -m_1), \delta(m_4, -m_3)\}.
\end{aligned}$$

Dans tous le cas on obtient,

$$\alpha' = \{\delta(m_1, -m_2), \delta(m_2, -m_2), \delta(m_3, -m_4), \delta(m_4, -m_3)\}.$$

Revenons à $GL(2n, \mathbb{R})$. Notons,

$$\gamma_j^i = (\gamma \setminus \alpha) \cup \alpha_j^k, \qquad j = 1, 2 \ k = 1, 2, 3, 4$$

et choisissons un chemin $\gamma \to \gamma_1^j \to \gamma_2^j \to \gamma'$, $j = 1, 2, 3, 4$, pour aller de γ à γ', par example celle donne par $j = 1$. Comme à chaque cran la longueur doit se réduire d'un, dans γ il n'y a pas des séries discrètes $\delta(m_t, -m_{t'})$ $1 \leq t \leq n$ qui satisfassent une des conditions suivantes,

$$\begin{aligned}
&m_1 > m_t > m_2 \text{ et } m_4 < m_{t'} < m_2, \\
&m_3 > m_t > m_4 \text{ et } m_3 < m_{t'} < m_1, \\
&m_2 > m_t > m_3 \text{ et } m_4 < m_{t'} < m_1.
\end{aligned}$$

Il est facile de prouver que si la dernière condition est satisfaite par γ, alors pour tout $j = 2, 3, 4$ on a $l(\gamma) = l(\gamma_1^j) = l(\gamma_2^j)$. Le même est possible d'être dit pour n'importe quel chemin choisit. D'où on conclut que toute paire de modules standard γ et γ' construit comme ci-dessus satisfait les propriétés énoncées dans le lemme.

Il nous reste à voir le cas où $d_2 \cap c_1 \neq \emptyset$. Si l'élément contenu dans $d_2 \setminus c_1$ n'est pas θ-invariant. Comme γ_2 n'est pas θ-invariant on obtient $d_2 \cap \theta \cdot d_1 = \emptyset$, par conséquent, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à cinq et tout module standard γ' tel que $\gamma' < \gamma_2$ et $l(\gamma') = l(\gamma_2) - 1$ ne peut pas être θ-invariant.

Supposons que l'élément contenu dans $d_2 \setminus c_1$ est θ-invariant, la cardinalité de l'ensemble des séries discrètes (modulo le centre), $\delta \in \gamma_2$, tels que $\theta \cdot \delta \notin \gamma_2$ est égal à quatre et comme avant on se ramène à $GL(8, \mathbb{R})$, où à nouveau on conclut que,

$$\alpha = \{\delta(m_1, -m_4), \delta(m_2, -m_2), \delta(m_3, -m_3), \delta(m_4, -m_1)\},$$
$$\alpha' = \{\delta(m_1, -m_2), \delta(m_2, -m_4), \delta(m_3, -m_1), \delta(m_4, -m_3)\},$$

$(\alpha \setminus d_1) \cup c_1$ est encore un fois donné par les quatre posibilités du cas derniere, mais comme cette fois-ci, $d_2 \cap c_1 \neq \emptyset$, pour $(\alpha_1 \setminus d_2) \cup c_2$ on a respectivement les posibilités,

$$\alpha_2^1 = \{\delta(m_1, -m_2), \delta(m_2, -m_3), \delta(m_3, -m_4), \delta(m_4, -m_1)\},$$
$$\alpha_2^2 = \{\delta(m_1, -m_2), \delta(m_2, -m_3), \delta(m_3, -m_4), \delta(m_4, -m_1)\},$$
$$\alpha_2^3 = \{\delta(m_1, -m_4), \delta(m_2, -m_1), \delta(m_3, -m_2), \delta(m_4, -m_3)\},$$
$$\alpha_2^4 = \{\delta(m_1, -m_4), \delta(m_2, -m_1), \delta(m_3, -m_2), \delta(m_4, -m_3)\}.$$

Et pour que chaque permutation qui conduit de γ à γ' réduise d'un la longueur il faut que dans γ ils n'existent pas des séries discrètes $\delta(m_t, -m_{t'})$ $1 \leq t \leq n$ qui satisfissent une des conditions précédemment énoncées. Par conséquent, toute paire de modules standard γ et γ' construit comme ci-dessus satisfait les propriétés énoncées dans le lemme. □

Lemme 4.2.5. *Soient γ' et γ, θ-invariants. Supposons que $\gamma' < \gamma$ et $l_\theta(\gamma) = l_\theta(\gamma') - 2$. Alors il existent exactement deux ensemble θ-invariants, γ_1 et γ_2 tels que $\gamma < \gamma_j < \gamma'$, $j = 1, 2$.*

Preuve. Voir l'Annexe A. □

4.2.2 Construction d'un complexe différentiel

Revenons à $\mathrm{Speh}(\delta, n)$, δ une série discrète de $GL(2, \mathbb{R})$ de caractère infinitésimal $(p/2, -p/2)$, $p \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'unique sous-module irréductible de l'induite,

$$I(\delta, n) = \delta(m_1, -m_n) \times \cdots \times \delta(m_n, -m_1),$$

où pour tout $i \in [1, n]$,

$$m_i = \frac{p}{2} + \frac{n-1}{2} + 1 - i.$$

C'est par rapport à l'ensemble de demi-entiers $m_1 > \cdots > m_n$ qu'on construit dans ce qui suit les ensembles γ de séries discrètes (modulo le centre) de $GL(2, \mathbb{R})$. Considérons l'ensemble $\Gamma_j := \{\gamma : l(\gamma) = j\}$ et l'espace,

$$Y_j := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_j} I(\gamma).$$

Pour former la resolution de $\mathrm{Speh}(\delta, n)$, J. Johnson prend pour toute paire γ, γ' avec $l(\gamma) = l(\gamma') - 1$, un morphisme,

$$\phi^J_{\gamma,\gamma'} : I(\gamma') \to I(\gamma),$$

qu'on appelle le morphismme de Johnson entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$, de manière à définir,

$$\begin{aligned} &\phi^J_{j-1} : Y_j \mapsto Y_{j-1}, \\ &\phi^J_{j-1} = \oplus_{\gamma' \in \Gamma_j} \oplus_{\gamma \in \Gamma_{j-1}} \phi_{\gamma,\gamma'}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme il à été dit au debut de la présent section, il démontre au théorème **(1)** du chapitre 6 de **[Joh84]** que la suite,

$$0 \to \mathrm{Speh}(\delta, n) \to I(\delta, n) \to \cdots \to Y_j \xrightarrow{\phi^J_{j-1}} Y_{j-1} \to \cdots \to X_0 \to 0. \tag{4.13}$$

est exacte.

Considerons maintenant l'ensemble $\Gamma^j_\theta := \{\gamma : \theta\gamma = \gamma,\ l_\theta(\gamma) = j\}$ et définissons l'espace,

$$X_j := \oplus_{\gamma \in \Gamma^j_\theta} I(\gamma)$$

On a pour objectif construire une suite θ-exacte,

$$0 \to \mathrm{Speh}(\delta, n) \to I(\delta, n) \to \cdots \to X_j \xrightarrow{\phi_{j-1}} X_{j-1} \to \cdots \to X_0 \to 0, \tag{4.14}$$

c'est-à-dire, un complexe différentiel tel que,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_{j-1})/\mathrm{im}(\phi_j)) = 0.$$

Pour définir le morphisme ϕ_j ils nous faut d'abord fixer pour toute paire de modules standard $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$ avec $l_\theta(\gamma) = l_\theta(\gamma') - 1$ un morphisme,

$$\phi_{\gamma,\gamma'} : I(\gamma') \mapsto I(\gamma). \tag{4.15}$$

On aura besoin du lemme suivant,

Lemme 4.2.6. *Soient γ et γ' un ensemble des séries discrètes définies comme plus haut tels que $l(\gamma) < l(\gamma')$. Si $\gamma \not\leq \gamma'$ alors $\dim \mathrm{Hom}(I(\gamma'), I(\gamma)) = m(\gamma, I(\gamma')) = 0$. Si $\gamma \leq \gamma'$ et $l(\gamma) < l(\gamma') - 1$ alors $\dim \mathrm{Hom}(I(\gamma'), I(\gamma)) = m(\gamma, I(\gamma')) = 1$ et tout morphisme non nul de cet espace est surjectif.*

Preuve. Montrons la première assertion. Comme $I(\gamma)$ est l'unique sous-représentation irréductible de $I(\gamma)$, elle est dans l'image de tout morphisme non nul vers $I(\gamma)$. Si l'on suppose $\mathrm{Hom}(I(\gamma'), I(\gamma)) \neq \{0\}$, on voit alors que $I(\gamma)$ est facteur de composition de $I(\gamma')$ et on conclut que $\gamma \leq \gamma'$ d'où on obtient le résultat. Passons maintenant à la preuve de la seconde affirmation. Notons,

$$\gamma' = \{m_j, -m_{j'}\}_{j=1}^n$$

Comme $\overline{I(\gamma)} \in \mathrm{J.H}(I(\gamma'))$ et $l(\gamma) = l(\gamma') - 1$ on sait qu'il existe une paire $l,\ t,\ 1 \leq l < t \leq n$ avec $m_{l'} < m_{t'}$ et une permutation,

$$\begin{aligned} &\kappa : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}, \\ &\kappa(l') = t', \\ &\kappa(k) = k',\ k \neq l', t', \end{aligned}$$

tel que dans γ' il n'y a pas des séries discrètes $\delta(m_k, -m_{k'})$, $1 \leq k \leq n$ avec $m_l > m_k > m_t$, $m_{l'} < m_{k'} < m_{t'}$, et,

$$\gamma = \{\delta(m_1, -m_{1'}), \cdots, \delta(m_l, -m_{t'}), \cdots, \delta(m_t, -m_{l'}), \cdots, \delta(m_n, -m_{n'})\}.$$

Par conséquent, d'après le théorème **(3.1.1)**, pour tout terme $\delta(m_i, -m_{i'})$ entre $\delta(m_l, -m_{l'})$ et $\delta(m_t, -m_{t'})$, (resp. entre $\delta(m_l, -m_{t'})$ et $\delta(m_t, -m_{l'})$), dans l'écriture de $I(\gamma')$, (resp. de $I(\gamma)$), on a soit $\delta(m_l, -m_{l'}) \times \delta(m_i, -m_{i'})$, (resp. $\delta(m_l, -m_{t'}) \times \delta(m_i, -m_{i'})$), irréductible et $\delta(m_l, -m_{l'}) \times \delta(m_i, -m_{i'}) = \delta(m_i, -m_{i'}) \times \delta(m_l, -m_{l'})$, (resp. $\delta(m_l, -m_{t'}) \times \delta(m_i, -m_{i'}) = \delta(m_i, -m_{i'}) \times \delta(m_l, -m_{t'})$), soit $\delta(m_i, -m_{i'}) \times \delta(m_t, -m_{t'})$, (resp. $\delta(m_i, -m_{i'}) \times \delta(m_t, -m_{l'})$) irréductible et $\delta(m_i, -m_{i'}) \times \delta(m_t, -m_{t'}) = \delta(m_t, -m_{t'}) \times \delta(m_i, -m_{i'})$, (resp. $\delta(m_i, -m_{i'}) \times \delta(m_t, -m_{l'}) = \delta(m_t, -m_{l'}) \times \delta(m_i, -m_{i'})$). On peut en conséquence sortir tous les termes entre $\delta(m_l, -m_{l'})$ et $\delta(m_t, -m_{t'})$ soit par la gauche, soit par la droite, et de même pour les termes entre $\delta(m_l, -m_{t'})$ et $\delta(m_t, -m_{l'})$ de $I(\gamma')$. Autrement dit, on écrit $I(\gamma)$ et $I(\gamma')$ sous la forme,

$$\begin{aligned} I(\gamma') &= \eta_1 \times \delta(m_l, -m_{l'}) \times \delta(m_t, -m_{t'}) \times \eta_2, \\ I(\gamma) &= \eta_1 \times \delta(m_l, -m_{t'}) \times \delta(m_t, -m_{l'}) \times \eta_2, \end{aligned}$$

où η_i, $i = 1, 2$ sont des produits de $\delta(m_i, -m_{i'})$, $i \notin \{l, t\}$. Or dans $GL(4, \mathbb{R})$ on a la suite exacte,

$$\begin{aligned} 0 \to \overline{\delta(m_l, -m_{l'}) \times \delta(m_t, -m_{t'})} &\to \delta(m_l, -m_{l'}) \times \delta(m_t, -m_{t'}) \\ &\to \delta(m_l, -m_{t'}) \times \delta(m_t, -m_{l'}) \to 0. \end{aligned}$$

Par les propriétés de l'induction, on en déduit qu'il existe un morphisme surjectif de $I(\gamma')$ dans $I(\gamma)$. Pour obtenir l'assertion $\dim \operatorname{Hom}(I(\gamma'), I(\gamma)) = 1$ on utilise le lemme suivant,

Lemme 4.2.7. *Soit X, Y deux modules de Harish-Chandra de longueur finie. Supposons que Y admette un unique sous-module irréductible $\overline{Y}$ et que celui-ci apparaisse avec multiplicité un dans J.H(X). Alors* $\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g},K}(X, Y) \leq 1$.

Preuve. Supposons que $\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g},K}(X, Y) \geq 1$. Soit $\phi_1 : X \to Y$ un morphisme non nul. Son image est un sous-module de Y, et contient donc $\overline{Y}$. On a donc $\overline{Y} \subset \operatorname{Im}\phi_1 \cong X/\ker(\phi_1)$. Posons $\ker(\phi_1) = U$. Il existe donc un sous-module V de X contenant U tel que $V/U\overline{Y}$. Soit $\phi_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g},K}(X, Y)$ un autre morphisme non nul. Nous voulons montrer qu'il est egal à ϕ_1 à un scalaire non nul près. Remarquons tout d'abord que la restriction de ϕ_2 à U est nulle : sinon lâimage de $\phi_2|_U$ contient $\overline{Y}$ et $\overline{Y}$ apparaît dans J.H(U), ce qui contredit la multiplicité 1. On a donc $U \subset \ker(\phi_2)$. Soit $\overline{\phi}_2 : X/U \to Y$ le morphisme induit. Notons aussi $\overline{\phi}_1 : X/U \to Y$ le morphisme induit par ϕ_1. Par le lemme de Schur, les restrictions de $\overline{\phi}_1$ et $\overline{\phi}_2$ à V/U coïncident à un scalaire près. De plus $\overline{\phi}_2$ n'est pas nul sur V/U , sinon ϕ_2 est nulle sur V, et ϕ_2 induit un morphisme de X/V vers Y dont l'image contient $\overline{Y}$, ce qui contredit encore une fois la multiplicité un. Ainsi ϕ_1 et ϕ_1 coïncident sur V à un scalaire non nul près, disons $\phi_2|_V = c\phi_1|_V$. Le morphisme $\phi_2 - c\phi_1$ est nul sur V. Par le même argument de multiplicité un, il est nul sur X. □

Finalement pour montrer la affirmation concernant la multiplicité, $m(\gamma, I(\gamma'))$, on rappelle que la représentation $\operatorname{Speh}(\delta, n)$ ainsi que toutes les modules standard intervenant dans sa résolution, sont, dans le cas du caractère infinitésimal régulier où l'on est, obtenus par induction cohomologique à partir d'un caractère unitaire de $GL(n, \mathbb{C})$ et des modules standard intervenant dans sa résolution. Le calcul des multiplicités dans ces modules standard, se fait donc via les polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan. Et il resulte, d'après les formules décrites dans **[Vog83]**, proposition **(6.14)**, que pour ce cas très particulier, ils valent 1, d'où on obtient la dernière assertion. □

Pour tout γ soit Ω_γ la fonctionnelle de Whittaker du module standard $I(\gamma)$ (Voir chapitre 1 section **(1.2.1)**). Fixons une paire γ, γ' tel que $l(\gamma) = l(\gamma') - 1$. Si $\gamma < \gamma'$ d'après le lemme **(4.2.6)** tout morphisme non nul $\phi \in \mathrm{Hom}(Y(\gamma'), Y(\gamma))$, est surjective, par conséquent la composition,

$$\Omega_\gamma \circ \phi,$$

définit une fonctionelle de Whittaker non nulle de $I(\gamma')$ et d l'unicité, multiplication par un scalair près, de la fonctionelle de Whittaker (Voir théorème **(2.2)** de **[Has79]** ou théorème **(1.1)** de **[Sha80]**), il existe une constante $C \in \mathbb{C}^*$ tel que,

$$C \cdot \Omega_\gamma \circ \phi = \Omega_{\gamma'}.$$

Définissons,

$$\phi^\omega_{\gamma,\gamma'} : Y(\gamma') \to Y(\gamma), \tag{4.16}$$

comme l'unique élément de $\mathrm{Hom}(I(\gamma'), I(\gamma))$ tel que,

$$\Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma'} = \Omega_{\gamma'}. \tag{4.17}$$

Si au contraire $\gamma \not\leq \gamma'$ on définit $\phi^\omega_{\gamma,\gamma'}$ comme le morphisme nul. On fait noter que d'après le lemme **(4.2.6)** pour toute paire γ, γ' avec $l(\gamma) = l(\gamma') - 1$ le morphisme $\phi^\omega_{\gamma,\gamma'}$ est proportionnel au morphisme de Johnson entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$.

Fixons à présent $\gamma \in \Gamma^j_\theta$ et $\gamma' \in \Gamma^{j+1}_\theta$ tels que $l(\gamma) < l(\gamma')$. Si $\gamma < \gamma'$, d'après le lemme **(4.2.2)** on sait que $l(\gamma') - l(\gamma) \leq 3$. Si $l(\gamma') - l(\gamma) > 1$, choisissons un chemin qui conduit de γ à γ',

$$\gamma < \gamma_1 < \gamma', \text{ si } l(\gamma') - l(\gamma) = 2,$$
$$\gamma < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma', \text{ si } l(\gamma') - l(\gamma) = 3.$$

Alors on définit,

$$\phi^\omega_{\gamma,\gamma'} : I(\gamma') \mapsto I(\gamma), \tag{4.18}$$

comme $\phi^\omega_{\gamma,\gamma'}$ si $l(\gamma') - l(\gamma) = 1$ ou comme la composition,

$$\phi^\omega_{\gamma,\gamma'} := \phi^\omega_{\gamma,\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma'}, \text{ si } l(\gamma') - l(\gamma) = 2,$$
$$\phi^\omega_{\gamma,\gamma'} := \phi^\omega_{\gamma,\gamma_2} \circ \phi^\omega_{\gamma_2,\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma'}, \text{ si } l(\gamma') - l(\gamma) = 3.$$

Finalement si $\gamma \not\leq \gamma'$, on définit $\phi^\omega_{\gamma,\gamma'} : I(\gamma') \mapsto I(\gamma)$ comme le morphisme nul.

Pour que $\phi^\omega_{\gamma,\gamma'}$ soit bien défini, ils nous faut montrer pour $l(\gamma') - l(\gamma) = 2$ ou 3, que la définition de $\phi^\omega_{\gamma,\gamma'}$ ne depend pas du chemin choisi. On fait remarquer d'abord, que pour tout chemin, $\gamma < \gamma_1 < \gamma'$, respectivement $\gamma < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma'$, on a,

$$\Omega_{\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma'}, \tag{4.19}$$
$$\Omega_{\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma_2} \circ \phi^\omega_{\gamma_2,\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma'}, \tag{4.20}$$

en effet, comme chaque morphisme intermediaire satisfait **(4.17)**, on obtient respectivement,

$$\Omega_{\gamma'} = \Omega_{\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma'},$$
$$\Omega_{\gamma'} = \Omega_{\gamma_2} \circ \phi^\omega_{\gamma_2,\gamma'} = \Omega_{\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma_2} \circ \phi^\omega_{\gamma_2,\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma_2} \circ \phi^\omega_{\gamma_2,\gamma'} = \Omega_\gamma \circ \phi^\omega_{\gamma,\gamma'}$$

Si maintenant $\mathbf{l}(\gamma) = \mathbf{l}(\gamma') - \mathbf{2}$, du lemme **(4.2.3)** existent uniquement deux éléments γ_1 et γ_2 avec $\gamma < \gamma_j < \gamma',\ j = 1, 2$. Par conséquent, entre γ' et γ on a deux chemins possibles, comme en plus le morphisme **(4.16)** est proportionnel au morphisme de Johnson on sait grâce à la suite construit par J. Johnson que $\phi^{\omega}_{\gamma,\gamma_1} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_1,\gamma'}$ et $\phi^{\omega}_{\gamma,\gamma_2} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_2,\gamma'}$ sont proportionnels, donc égaux car ils satisfont l'égalité **(4.17)**.

Si $\mathbf{l}(\gamma) = \mathbf{l}(\gamma') - \mathbf{3}$, du lemme **(4.2.4)** il existe un sous-ensemble α de γ donné par $\alpha' = \{(m_{l_1}, -m_{l_4}), ((m_{l_2}, -m_{l_2}), ((m_{l_3}, -m_{l_3}), (m_{l_4}, -m_{l_1})\}$ tel que si nous notons $\gamma^j_k = (\gamma' \setminus \alpha') \cup \alpha^j_k,\ 1 \leq k \leq 4,\ 1 \leq j \leq 2$, où,

$$\begin{aligned}
\alpha^2_1 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_2}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_3}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_1})\},\\
\alpha^2_2 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_3}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_2}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_1})\},\\
\alpha^2_3 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_2}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_1}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_3})\},\\
\alpha^2_4 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_1}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_3}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_1})\}
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\alpha^1_1 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_2}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_3}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_1})\},\\
\alpha^1_2 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_2}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_1}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_3})\},\\
\alpha^1_3 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_3}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_1}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_2})\},\\
\alpha^1_4 &= \{\delta(m_{l_1}, -m_{l_4}), \delta(m_{l_2}, -m_{l_1}), \delta(m_{l_3}, -m_{l_2}), \delta(m_{l_4}, -m_{l_3})\}.
\end{aligned}$$

on a le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & & I(\gamma') \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
I(\gamma^2_1) \arrow[d] \arrow[dr] & I(\gamma^2_2) \arrow[dl] \arrow[drr] & & I(\gamma^2_3) \arrow[dll] \arrow[dr] & I(\gamma^2_4) \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\gamma^1_1) \arrow[drr] & I(\gamma^1_2) \arrow[dr] & & I(\gamma^1_3) \arrow[dl] & I(\gamma^1_4) \arrow[dll] \\
 & & I(\gamma) & &
\end{tikzcd}$$

où on a note une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. On constate grâce au lemme **(4.2.3)**, que pour aller de $I(\gamma')$ à un module standard de la forme $I(\gamma^1_k)$ (pour k convenable) il y a exactement deux chemins, on trouve aussi la même quantité de chemins pour aller de $I(\gamma^2_{k'})$ (pour k' convenable) à $I(\gamma)$. Comme le morphisme **(4.16)** est proportionnel au morphisme de Johnson on sait grâce à la suite construit par J. Johnson que ces deux chemins sont proportionnels, donc égaux car ils satisfont l'égalité **(4.17)**. En regardant le diagramme on peut grâce à ces égalités conclure que tout chemin entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$ donne le même morphisme. Le morphisme $\phi^{\omega}_{\gamma,\gamma'}$, $\gamma \in \Gamma^i_\theta$ et $\gamma' \in \Gamma^{i+1}_\theta$ est donc bien défini.

Continuons avec la construction du morphisme **(4.15)**. Du lemme **(4.2.5)** entre $\gamma \in \Gamma^{i-1}_\theta$ et $\gamma' \in \Gamma^{i+1}_\theta$ existent seulement deux éléments $\gamma_j \in \Gamma^i_\theta,\ j = 1, 2$, tels que $\gamma < \gamma_j < \gamma'\ j = 1, 2$. En plus on a le resultat suivant,

Lemme 4.2.8. *Soient γ et γ', θ-invariants. Supposons que $l_\theta(\gamma) = l_\theta(\gamma') - 1$ et $\gamma < \gamma'$, alors*

$$\phi^\omega_{\gamma,\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma'} = \phi^\omega_{\gamma,\gamma_2} \circ \phi^\omega_{\gamma_2,\gamma'}.$$

où $I(\gamma_1)$ et $I(\gamma_2)$ forment la paire de modules standard donnée par le lemme ***(4.2.5)****.*

Preuve. Voir l'Annexe A. □

Du lemme **(4.2.8)** la construction du complexe différentiel **(4.14)** se ramène donc à trouver pour toute paire de caractères $\mu \in \Gamma_i$ et $\mu' \in \Gamma_{i+1}$ des constantes $\lambda_{\mu,\mu'} \in \mathbb{C}$ de façon à ce que, pour n'importe quelle paire $\gamma \in \Gamma_{i-1}$ et $\gamma' \in \Gamma_{i+1}$ on ait,

$$\lambda_{\gamma,\gamma_1} \cdot \lambda_{\gamma_1,\gamma'} + \lambda_{\gamma,\gamma_2} \cdot \lambda_{\gamma_2,\gamma'} = 0,$$

où $I(\gamma_1)$ et $I(\gamma_2)$ forment la paire de modules standard donnée par le lemme **(4.2.5)**. Une fois les constantes choisies, nous définissons pour toute paire $\gamma \in \Gamma_i$ et $\gamma' \in \Gamma_{i+1}$ le morphisme,

$$\phi_{\gamma,\gamma'} := \lambda_{\gamma,\gamma'} \phi^\omega_{\gamma,\gamma'}$$

la suite définie à partir des morphismes,

$$\phi_i : X_{i+1} \to X_i$$

où,

$$\phi_i := \oplus_{\gamma \in \Gamma_i} \oplus_{\gamma' \in \Gamma_{i+1}} \phi_{\gamma,\gamma'}$$

est donc un complexe différentiel.

4.2.3 θ-Resolution dans $GL(2,\mathbb{R})$ et $GL(4,\mathbb{R})$

Dans le cas de $GL(2,\mathbb{R})$ il n'y a rien à prouver, car toute série discrète $\delta(m,-m)$, $2m \in \mathbb{Z}_{>0}$ est θ-invariante et irréductible.

Situons nous dans $GL(4,\mathbb{R})$. Comme $I(\gamma^0) := \delta(m_1,-m_1) \times \delta(m_2,-m_2)$ est l'unique sous-quotient de $I(\gamma^1) := \delta(m_1,-m_2) \times \delta(m_2,-m_1)$, la suite,

$$0 \to \overline{I(\gamma^1)} \to I(\gamma^1) \to I(\gamma^0) \to 0, \tag{4.21}$$

est exacte, en plus chaque représentation qui intervienent est θ-invariante, par conséquent elle est ausi θ-exacte.

4.2.4 θ-Resolution dans $GL(6,\mathbb{R})$

Dans le diagramme ci-dessous, on a abusivement noté γ_i^j à la place du module standard $I(\gamma_i^j)$, une flèche pleine au lieu du morphisme standard, alors qu'une flèche pointillée est l'opposée du morphisme standard. On a :

Proposition 4.2.1. *Ce diagramme définit un complexe :*

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & \\
& \overline{I(\gamma^2)} \arrow[d] & \\
& \gamma^2 := \begin{bmatrix} (m_1-m_3) \\ (m_2-m_2) \\ (m_3-m_1) \end{bmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\gamma_1^1 := \begin{bmatrix} (m_1-m_1) \\ (m_2-m_3) \\ (m_3-m_2) \end{bmatrix} \arrow[dr] & & \gamma_2^1 := \begin{bmatrix} (m_1-m_2) \\ (m_2-m_1) \\ (m_3-m_3) \end{bmatrix} \arrow[dl, dotted] \\
& \gamma^0 := \begin{bmatrix} (m_1-m_1) \\ (m_2-m_2) \\ (m_3-m_3) \end{bmatrix} \arrow[d] & \\
& 0 &
\end{tikzcd}
.
$$

Il est clair que $\overline{I}(\gamma^2)$ est dans l'intersection $\ker(\phi_{\gamma_1^1,\gamma^2}) \cap \ker(\phi_{\gamma_2^1,\gamma^2})$. Il faut prouver que la somme des morphismes obtenus en suivant l'un ou l'autre des chemins est nulle. Et on sait que cette somme des morphismes est nulle si et seulement si cette somme annule le modèle de Whittaker. Or cette somme annule le modèle de Whittaker puisque l'un des chemins a une flèche pleine et une flèche pointillée alors que l'autre a ses deux flèches pleines.

θ-exactitude de la suite. Il nous faut à présent démontrer que la suite ci-dessus est θ-exacte, c'est-à-dire, montrer l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_{i-1})/\mathrm{im}(\phi_i)) = 0.$$

Situons nous dans le cran $(\mathbf{2} \to \mathbf{1})$,

$$\overline{I(\gamma^2)} \to I(\gamma^2) \to \oplus_{i=1}^2 I(\gamma_i^1),$$

Notons,

$$\mu := \{(m_1, -m_2), (m_2, -m_3), (m_3, -m_1)\},$$
$$\theta\mu := \{(m_1, -m_3), (m_2, -m_1), (m_3, -m_2)\}.$$

Dans tout la suite on note pour tout ensemble λ,

$$K_\lambda := \bigcap_{\lambda' < \lambda,\ l(\lambda') = l(\lambda) - 1} \ker(\phi^J_{\lambda',\lambda}). \tag{4.22}$$

Soit $w \in \ker(\phi_{\gamma_1^1,\gamma^2}) \cap \ker(\phi_{\gamma_2^1,\gamma^2})$. On a respectivement, $\phi^J_{\mu,\gamma^2}(w) \in K_\mu$ et $\phi^J_{\theta\mu,\gamma^2}(w) \in K_{\theta\mu}$. L'exactitude de la suite **(4.13)** nous permet de choisir $w_1 \in \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^2})$, respectivement $w_2 \in \ker(\phi^J_{\mu,\gamma^2})$ tel que,

$$\phi^J_{\mu,\gamma^2}(w_1) = \phi^J_{\mu,\gamma^2}(w) \text{ et } \phi^J_{\theta\mu,\gamma^2}(w_2) = \phi^J_{\theta\mu,\gamma^2}(w).$$

Soit $y = w - (w_1 + w_2)$ alors $y \in \ker(\phi^J_{\mu,\gamma^2}) \cap \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^2})$ et on peut écrire,

$$w = (w_1 + y) + w_2.$$

Ce qui démontre le résultat suivant ;

Lemme 4.2.9.

$$\ker(\phi_1) = \ker(\phi^J_{\mu,\gamma^2}) + \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4})$$

Du lemme ils nous est donc possible conclure,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_1)) &= \mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi^J_{\mu,\gamma^2}) + \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^2}))\\ &= \mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi^J_{\mu,\gamma^2}) \cap \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^2}))\\ &= \mathrm{Tr}_\theta(\overline{I(\gamma^2)}).\end{aligned}$$

et clairement,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_1)/\overline{I(\gamma^2)}) = 0.$$

Cran $\mathbf{1} \to \mathbf{0}$,

$$I(\gamma^2) \to \oplus_{j=1}^2 I(\gamma^1_j) \to I(\gamma_0),$$

ou,

$$\gamma^0 := \{(m_1, -m_1), (m_2, -m_2), (m_3, -m_3)\}.$$

Pour chaque $1 \leq j \leq 2$ on a, car $m(\gamma^0, \gamma^1_j) = 1$, l'égalité,

$$\ker(\phi_{\gamma_0,\gamma^1_j}) = \overline{I(\gamma^1_j)}.$$

Comme en plus chaque $\overline{I(\gamma^1_j)},\ 1 \leq j \leq 2$ il est contenu dans $\mathrm{im}(\phi_1)$ on conclut,

$$\ker(\phi_0)/\mathrm{im}(\phi_1) = 0.$$

4.2.5 θ-Resolution dans $GL(8, \mathbb{R})$

Situons nous à présent dans $GL(8, \mathbb{R})$. Dans le diagramme ci-dessous, on a, comme dans le cas de $GL(6, \mathbb{R})$, abusivement noté γ^j_i à la place du module standard $I(\gamma^j_i)$, une flèche pleine au lieu du morphisme standard, alors qu'une flèche pointillée est l'opposée du morphisme standard. On a :

Proposition 4.2.2. *Ce diagramme définit un complexe :*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
 & \overline{I(\gamma^4)} \arrow[d] & \\
 & \gamma^4 := \begin{bmatrix} (m_1-m_4) \\ (m_2-m_3) \\ (m_3-m_2) \\ (m_4-m_1) \end{bmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\gamma_1^3 := \begin{bmatrix} (m_1-m_4) \\ (m_2-m_2) \\ (m_3-m_3) \\ (m_4-m_1) \end{bmatrix} \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \gamma_2^3 := \begin{bmatrix} (m_1-m_2) \\ (m_2-m_4) \\ (m_3-m_1) \\ (m_4-m_2) \end{bmatrix} \arrow[dll, dotted] \arrow[dl, dotted] \arrow[d, dotted] \\
\gamma_1^2 := \begin{bmatrix} (m_1-m_3) \\ (m_2-m_2) \\ (m_3-m_1) \\ (m_4-m_4) \end{bmatrix} \arrow[d] \arrow[dr] & \gamma_2^2 := \begin{bmatrix} (m_1-m_2) \\ (m_2-m_1) \\ (m_3-m_4) \\ (m_4-m_3) \end{bmatrix} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \gamma_3^2 := \begin{bmatrix} (m_1-m_1) \\ (m_2-m_4) \\ (m_3-m_3) \\ (m_4-m_2) \end{bmatrix} \arrow[dl, dotted] \arrow[d] \\
\gamma_1^1 := \begin{bmatrix} (m_1-m_2) \\ (m_2-m_1) \\ (m_3-m_3) \\ (m_4-m_4) \end{bmatrix} \arrow[dr] & \gamma_2^1 := \begin{bmatrix} (m_1-m_1) \\ (m_2-m_3) \\ (m_3-m_2) \\ (m_4-m_4) \end{bmatrix} \arrow[d, dotted] & \gamma_3^1 := \begin{bmatrix} (m_1-m_1) \\ (m_2-m_2) \\ (m_3-m_4) \\ (m_4-m_3) \end{bmatrix} \arrow[dl, dotted] \\
 & \gamma^0 := \begin{bmatrix} (m_1-m_1) \\ (m_2-m_2) \\ (m_3-m_3) \\ (m_4-m_4) \end{bmatrix} \arrow[d] & \\
 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Il est clair que $\overline{I}(\gamma^4)$ est dans l'intersection $\ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_2^3,\gamma^4})$. Fixons $i \in [4,2]$; on constate que pour aller d'un module standard de la forme $I(\gamma_j^i)$ (pour j convenable) à un module standard de la forme $I(\gamma_{j'}^{i-2})$ (pour j' convenable) il y a exactement deux chemins. Il faut prouver que la somme des morphismes obtenus en suivant l'un ou l'autre des chemins est nulle. Et on sait que cette somme des morphismes est nulle si et seulement si cette somme annule le modèle de Whittaker. Or cette somme annule le modèle de Whittaker puisque l'un des chemins a une flèche pleine et une flèche pointillée alors que l'autre a soit ses deux flèches pleines soit ses deux flèches pointillées.

θ-exactitude de la suite. Il nous faut à présent démontrer que la suite ci-dessus est θ-exacte. Situons nous dans le cran $(\mathbf{4} \to \mathbf{3})$,

$$\overline{I(\gamma^4)} \to I(\gamma^4) \to \oplus_{i=1}^2 I(\gamma_i^3),$$

Rappelons que,

$$\gamma_1^3 := \{(m_1, -m_4), (m_2, -m_2), (m_3, -m_3), (m_4, -m_1)\},$$
$$\gamma_2^3 := \{(m_1, -m_3), (m_2, -m_4), (m_3, -m_1), (m_4, -m_2)\}.$$

et notons,

$$\mu := \{(m_1, -m_3), (m_2, -m_4), (m_3, -m_2), (m_4, -m_1)\},$$
$$\theta\mu := \{(m_1, -m_4), (m_2, -m_3), (m_3, -m_1), (m_4, -m_2)\}.$$

On aura besoin du résultat suivant ;

Lemme 4.2.10.

$$\ker(\phi_3) = (\ker(\phi^J_{\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4})) + (\ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4}))$$

Preuve. Soit $w \in \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_2^3,\gamma^4})$. Comme **(4.13)** définit un complexe différentiel, $\phi^J_{\mu,\gamma^4}(w) \in K_\mu$ (Voir formule **(4.22)**) et $\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}(w) \in K_{\theta\mu}$. L'exactitude de la suite **(4.13)** nous permet de choisir $w_1 \in \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4})$, respectivement $w_2 \in \ker(\phi^J_{\mu,\gamma^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^3})$ tel que,

$$\phi^J_{\mu,\gamma^4}(w_1) = \phi^J_{\mu,\gamma^4}(w) \text{ et } \phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}(w_2) = \phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}(w).$$

Soit $y = w - (w_1 + w_2)$ alors $y \in \ker(\phi^J_{\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4})$ et on peut écrire,

$$w = (w_1 + y) + w_2.$$

Ce qui nous donne l'inclusion, $\phi_3 \subset (\ker(\phi^J_{\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4})) + (\ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4}))$. L'inclusion opposé est evident du fait que **(4.13)** définit un complexe différentiel. $\square$

Du lemme **(4.2.10)** ils nous est donc possible conclure,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_{3,4})) &= \mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi^J_{\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4}) + (\ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4})) \\
&= \mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi^J_{\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4})) \\
&= \mathrm{Tr}_\theta(\overline{I(\gamma^4)}).
\end{aligned}$$

et clairement,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_{3,4})/\mathrm{im}(\phi_4)) = \mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_{3,4})/\overline{I(\gamma^4)}) = 0.$$

Cran **3** $\to$ **2**,

$$I(\gamma^4) \to \oplus_{k=1}^2 I(\gamma_k^3) \to \oplus_{j=1}^3 I(\gamma_j^2),$$

où,

$$\gamma_1^2 = \{(m_1, -m_3), (m_2, -m_2), (m_3, -m_1), (m_4, -m_4)\},$$
$$\gamma_2^2 = \{(m_1, -m_2), (m_2, -m_1), (m_3, -m_4), (m_4, -m_3)\},$$
$$\gamma_3^2 = \{(m_1, -m_1), (m_2, -m_4), (m_3, -m_3), (m_4, -m_2)\}.$$

Le fait que tout élément de $I(\gamma_1^3)$ soit possible d'être écrit comme la somme d'un élément dans $\mathrm{im}(\phi_3)$ plus un élément dans $I(\gamma_2^3)$ nous permet de ramèner le problème de l'étude de $\ker(\phi_2)/\mathrm{im}(\phi_3)$ à l'étude du space $\ker(\phi_2) \cap I(\gamma_2^3)/\mathrm{im}(\phi_3) \cap I(\gamma_2^3)$. Notons,

$$\begin{aligned}\nu &:= \{(m_1, -m_2), (m_2, -m_4), (m_3, -m_1), (m_4, -m_3)\},\\ \theta\nu &:= \{(m_1, -m_3), (m_2, -m_1), (m_3, -m_4), (m_4, -m_2)\}.\end{aligned}$$

Comme pour le cran précédent on démontre,

Lemme 4.2.11.

$$\begin{aligned}\ker(\phi_2) \cap I(\gamma_2^3) = (&\ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}))\\ &+ (\ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})).\end{aligned}$$

Preuve. Comme,

$$\begin{aligned}\ker(\phi_{\gamma_2^2,\gamma_2^3}) &= \ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) + \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})\\ +(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3})^{-1}(\ker(\phi_{\gamma_2^2,\nu}) \setminus \{0\}) &\cap (\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})^{-1}(\ker(\phi^J_{\gamma_2^2,\theta\nu}) \setminus \{0\})\end{aligned}$$

on peut écrire,

$$\begin{aligned}\ker(\phi_2) \cap I(\gamma_2^3) = \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) &\cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}) \cap [\ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) + \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})\\ &+ (\phi^J_{\nu,\gamma_2^3})^{-1}(\ker(\phi_{\gamma_2^2,\nu}) \setminus \{0\}) \cap (\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})^{-1}(\ker(\phi^J_{\gamma_2^2,\theta\nu}) \setminus \{0\})]\end{aligned}$$

Choisissons $x \in (\phi^J_{\nu,\gamma_2^3})^{-1}(\ker(\phi^J_{\gamma_2^2,\nu}) \setminus \{0\}) \cap (\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})^{-1}(\ker(\phi^J_{\gamma_2^2,\theta\nu}) \setminus \{0\})$, $y \in \ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3})$ et $z \in \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})$, tels que $x + y + z \in \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})$. Soit η tel que $\nu > \eta$, $l(\eta) = l(\nu) - 1$ et $\eta \neq \gamma_2^2$. Notons aussi par η' l'unique caractère différent de ν tel que $\gamma_2^3 > \eta' > \eta$, alors $\eta' = \gamma_1^2$ ou $\eta' = \gamma_3^2$. On a,

$$\begin{aligned}\phi^J_{\eta,\nu} \circ \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(x+z) &= \phi^J_{\eta,\nu} \circ \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(x+y+z)\\ &= -\phi^J_{\eta,\eta'} \circ \phi^J_{\eta',\gamma_2^3}(x+y+z)\\ &= -\phi^J_{\eta,\eta'}(0) = 0.\end{aligned}$$

En plus,

$$\phi^J_{\gamma_2^2,\nu} \circ \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(x+z) = -\phi^J_{\gamma_2,\theta\nu} \circ \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(x) = 0.$$

Donc,

$$\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(x) + \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(z) \in K_\nu.$$

Le même calcul est possible d'être fait, cette fois-ci, pour $\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(x+y)$, d'où on obtient,

$$\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(x) + \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(y) \in K_{\theta\nu}.$$

Des égalités suivants (qu'on démontre à la fin de la preuve),

Lemme 4.2.12.

$$\begin{aligned}K_\nu &= \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(\ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})),\\ K_{\theta\nu} &= \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(\ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})),\end{aligned}$$

il existe $w_1 \in \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})$, $w_2 \in \ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})$, tel que,

$$\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(w_1) = \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(x) + \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(z) \qquad \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(w_2) = \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(x) + \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(y).$$

Il nous est désormais possiblé écrire,

$$x + y + z = \frac{x + y + z - w_1 + w_2}{2} + \frac{x + y + z + w_1 - w_2}{2},$$

où le première terme à droite de l'égalité est contenu dans $\ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3})$ et le deuxième dans $\ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})$. Donc,

$$\ker(\phi_{2,3}) \cap I(\gamma_2^3) = \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}) \cap (\ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) + \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})).$$

Considérons maintenant $x \in \ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3})$ et $y \in \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})$ tels que, $x + y \in \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})$. On définit,

$$z_1 = \phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}(x) = -\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}(y)$$

et

$$z_2 = \phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(x) = -\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(y).$$

Notons,

$$\begin{aligned} \alpha &:= \{(m_1, -m_2), (m_2, -m_3), (m_3, -m_1), (m_4, -m_4)\}, \\ \theta\alpha &:= \{(m_1, -m_3), (m_2, -m_1), (m_3, -m_2), (m_4, -m_4)\}. \end{aligned}$$

Comme,

$$\begin{aligned} \phi^J_{\alpha,\gamma_1^2}(z_1) &= \phi^J_{\alpha,\gamma_1^2} \circ \phi^J_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}(x) \\ &= -\phi^J_{\alpha,\nu} \circ \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(x) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi^J_{\theta\alpha,\gamma_1^2}(z_1) &= \phi^J_{\theta\alpha,\gamma_1^2} \circ \phi^J_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}(-y) \\ &= \phi^J_{\alpha,\theta\nu} \circ \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(-y) = 0. \end{aligned}$$

on conclut $z_1 \in K_{\gamma_1^2}$. Le même calcul est possible d'être fait, cette fois-ci, pour z_2, alors, $z_2 \in K_{\gamma_3^2}$. Dans le cours de la preuve de la θ-exactitude pour le cran $(\mathbf{2} \to \mathbf{1})$ on donne une preuve aux égalités suivants,

$$\begin{aligned} K_{\gamma_1^2} &= \overline{I(\gamma_1^2)}, \\ K_{\gamma_3^2} &= \overline{I(\gamma_3^2)}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir, $\bar{z}_1 \in \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})$, $\bar{z}_2 \in \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})$ tel que $\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}(\bar{z}_1) = z_1$ et $\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(\bar{z}_2) = z_2$. Ce qui nous permet d'écrire,

$$x + y = (x - \bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (y + \bar{z}_1 + \bar{z}_2),$$

où $x-\bar{z}_1-\bar{z}_2 \in \ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3})\cap\ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3})\cap\ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})$ et $y+\bar{z}_1+\bar{z}_2 \in \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3})\cap\ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3})\cap$ $\ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})$.

Il ne nous reste maintenant qu'à démontrer le lemme **(4.2.12)**. Soit $z \in K_\nu$. Notons,

$$\begin{aligned}\lambda &:= \{(m_1,-m_4),(m_2,-m_2),(m_3,-m_1),(m_4,-m_3)\},\\ \theta\lambda &:= \{(m_1,-m_3),(m_2,-m_2),(m_3,-m_4),(m_4,-m_1)\},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\zeta &:= \{(m_1,-m_2),(m_2,-m_4),(m_3,-m_3),(m_4,-m_1)\},\\ \theta\zeta &:= \{(m_1,-m_4),(m_2,-m_1),(m_3,-m_3),(m_4,-m_2)\}.\end{aligned}$$

Par l'exactitude de la suite **(4.13)** il existe $a \in I(\lambda)$, $\bar{a} \in I(\theta\lambda)$, $b \in I(\zeta)$, $\bar{b} \in I(\theta\zeta)$ et $c \in I(\gamma_2^3)$, tel que,

$$z = \phi^J_{\nu,\lambda}(a) + \phi^J_{\nu,\zeta}(b) + \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(c),$$

et pour tout $\eta \neq \nu$ avec $l(\eta) = l(\nu)$,

$$0 = \phi^J_{\eta,\lambda}(a) + \phi^J_{\eta,\theta\lambda}(\bar{a}) + \phi^J_{\eta,\zeta}(b) + \phi^J_{\eta,\theta\zeta}(\bar{b}) + \phi^J_{\eta,\gamma_2^3}(c).$$

Soit $u \in I(\mu)$, respectivement $\bar{u} \in I(\theta\mu)$, tel que $\phi^J_{\theta\lambda,\mu}(u) = -\bar{a}$, respectivement $\phi^J_{\theta\zeta,\theta\mu}(\bar{u}) = -\bar{b}$. On écrit $a_1 = a + \phi^J_{\lambda,\theta\mu}(\bar{u})$, $b_1 = b + \phi^J_{\zeta,\mu}(u)$ et $c_1 = c + \phi^J_{\gamma_2^3,\mu}(u) + \phi^J_{\gamma_2^3,\theta\mu}(\bar{u})$. Alors

$$\begin{aligned}z &= \phi^J_{\nu,\lambda}(a_1) + \phi^J_{\nu,\zeta}(b_1) + \phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(c_1),\\ 0 &= \phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}(c_1),\end{aligned}$$

et pour tout $\eta \neq \nu$, $\eta \neq \theta\nu$ avec $l(\eta) = l(\nu)$,

$$0 = \phi^J_{\eta,\lambda}(a_1) + \phi^J_{\eta,\zeta}(b_1) + \phi^J_{\eta,\gamma_2^3}(c_1).$$

Notons,

$$\begin{aligned}\alpha &:= \{(m_1,-m_2),(m_2,-m_3),(m_3,-m_1),(m_4,-m_4)\},\\ \theta\alpha &:= \{(m_1,-m_3),(m_2,-m_1),(m_3,-m_2),(m_4,-m_4)\}.\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\tau &:= \{(m_1,-m_4),(m_2,-m_1),(m_3,-m_2),(m_4,-m_3)\},\\ \theta\tau &:= \{(m_1,-m_2),(m_2,-m_3),(m_3,-m_4),(m_4,-m_1)\},\end{aligned}$$

On a, car $\gamma_2^3 \not> \tau$ et $\zeta \not> \tau$, l'égalité $\phi^J_{\tau,\lambda}(a_1) = 0$, donc,

$$\phi^J_{\theta\alpha,\gamma_1^2} \circ \phi^J_{\gamma_1^2,\lambda}(a_1) = -\phi^J_{\theta\alpha,\tau} \circ \phi^J_{\tau,\lambda}(a_1) = 0.$$

et l'élément $\phi^J_{\gamma_1^2,\lambda}(a_1)$ appartient à $\ker(\phi^J_{\theta\alpha,\gamma_1^2})$, par conséquent,

$$\phi^J_{\alpha,\gamma_1^2} \circ \phi^J_{\gamma_1^2,\lambda}(a_1) \in \ker(\phi^J_{\gamma_1^1,\alpha}) \cap \ker(\phi^J_{\gamma_2^1,\alpha}).$$

Considérons le couple suivant des morphismes de Johnson pour $GL(6,\mathbb{R})$,

$$\phi^{GL(6)}_{\gamma_1^1,\alpha} : I(\{\delta(m_1,-m_2),\delta(m_2,-m_3),\delta(m_3,-m_1)\}) \to I(\{\delta(m_1,-m_2),\delta(m_2,-m_1),\delta(m_3,-m_3)\}),$$

et

$$\phi^{GL(6)}_{\gamma_2^1,\alpha} : I(\{\delta(m_1,-m_2),\delta(m_2,-m_3),\delta(m_3,-m_1)\}) \to I(\{\delta(m_1,-m_1),\delta(m_3,-m_2),\delta(m_2,-m_3)\}).$$

Alors,

$$\ker(\phi^J_{\gamma_1^1,\alpha}) \cap \ker(\phi^J_{\gamma_2^1,\alpha}) = \ker \phi^{GL(6)}_{\gamma_1^1,\alpha} \cap \ker \phi^{GL(6)}_{\gamma_2^1,\alpha} \times I(m_4,-m_4).$$

Comme on l'a dit plus haut, le calcul des multiplicités pour les modules standard intervenant dans la résolution d'un module de Speh, $\mathrm{Speh}(\delta,n)$, se fait via les polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan. Et d'après la proposition **(6.14)** de **[Vog83]** il est facile de conclure que pour toute paire $\gamma,\ \gamma'$ avec $l(\gamma')-l(\gamma)\leq 2$ on a $m(\gamma,I(\gamma'))=1$. On obtient donc,

$$\ker \phi^{GL(6)}_{\gamma_1^1,\alpha} \cap \ker \phi^{GL(6)}_{\gamma_2^1,\alpha} = \overline{I(\{\delta(m_1,-m_2),\delta(m_2,-m_3),\delta(m_3,-m_1)\})},$$

d'où on peut écrire,

$$\begin{aligned}\ker(\phi^J_{\gamma_1^1,\alpha}) \cap \ker(\phi^J_{\gamma_2^1,\alpha}) &= \overline{I(\{\delta(m_1,-m_2),\delta(m_2,-m_3),\delta(m_3,-m_1)\})} \times I(m_4,-m_4)\\ &= \overline{I(\alpha)}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\phi^J_{\alpha,\gamma_1^2} \circ \phi^J_{\gamma_1^2,\lambda}(a_1) \in \overline{I(\alpha)},$$

et on peut choisir un élément $\bar{v} \in I(\theta\mu)$ tel que, $\phi^J_{\lambda,\theta\mu}(\bar{v}) = -a_1$ et $\phi^J_{\theta\zeta,\theta\mu}(v) = 0$. De manière analogue on choisit un élément $v \in I(\mu)$ tel que, $\phi^J_{\zeta,\mu}(v) = -b_1$ et $\phi^J_{\theta\lambda,\mu}(v) = 0$. On écrit $c_2 = c_1 + \phi^J_{\gamma_2^3,\mu}(v) + \phi^J_{\gamma_2^3,\theta\mu}(\bar{v})$, alors $c_2 \in \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})$ et $\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}(c_2) = z$. $\square$

Du lemme **(4.2.11)** ils nous est désormais possible d'écrire,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_{2,3}) \cap I(\gamma_2^3)) &= \mathrm{Tr}_\theta[\ker(\phi^J_{\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})\\ &\qquad + \ker(\phi^J_{\theta\nu,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3}) \cap \ker(\phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3})]\\ &= \mathrm{Tr}_\theta(K_{\gamma_2^3})\end{aligned}$$

Comme en plus,

$$K_{\gamma_2^3} = \phi^J_{\gamma_2^3,\mu}\left(\bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\mu})\right) + \phi^J_{\gamma_2^3,\theta\mu}\left(\bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\theta\mu})\right)$$

on obtient,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_{2,3}) \cap X(\gamma_2^3)) = \mathrm{Tr}_\theta[\phi_{\gamma_2^3,\mu}(\bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\mu})) \cap \phi^J_{\gamma_2^3,\theta\mu}(\bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\theta\mu}))].$$

Soit $x \in \bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\mu})$ et $y \in \bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\theta\mu})$ tel que,

$$\phi^J_{\gamma_2^3,\mu}(x) = \phi^J_{\gamma_2^3,\theta\mu}(y).$$

Par l'exactitude de la suite **(4.13)** il existe un élément $z \in I(\gamma^4) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4})$ tel que,

$$\phi^J_{\mu,\gamma^4}(z) = x, \qquad \phi^J_{\theta\mu,\gamma^4}(z) = -y,$$

d'où,

$$\phi^J_{\gamma_2^3,\mu}\left(\bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\mu})\right) \cap \phi^J_{\gamma_2^3,\theta\mu}\left(\bigcap_{\nu'\neq\gamma_2^3} \ker(\phi^J_{\nu',\theta\mu})\right) = \phi_3(I(\gamma^4) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^3,\gamma^4}))$$

et on peut clairement conclure,

$$\mathrm{Tr}_\theta(I(\gamma_2^3) \cap \ker(\phi_2)/I(\gamma_2^3) \cap \mathrm{im}(\phi_3)) = 0.$$

Cran $\mathbf{2} \to \mathbf{1}$,

$$I(\gamma_1^3) \oplus I(\gamma_2^3) \to \oplus_{k=1}^3 I(\gamma_k^2) \to \oplus_{j=1}^3 I(\gamma_j^1),$$

où,

$$\begin{aligned}
\gamma_1^1 &:= \{(m_1,-m_2),(m_2,-m_1),(m_3,-m_3),(m_4,-m_4)\},\\
\gamma_2^1 &:= \{(m_1,-m_1),(m_2,-m_3),(m_3,-m_2),(m_4,-m_4)\},\\
\gamma_3^1 &:= \{(m_1,-m_1),(m_2,-m_2),(m_3,-m_4),(m_4,-m_3)\}.
\end{aligned}$$

Le fait que tout élément dans $I(\gamma_1^2)$ soit possible d'être écrit comme la somme d'un élément dans $\mathrm{im}(\phi_{2,3})$ plus un élément dans $I(\gamma_2^2) \oplus I(\gamma_3^2)$ permet ramèner le problème a l'étude de l'espace $\ker(\phi_1) \cap (I(\gamma_2^2) \oplus I(\gamma_3^2))$. Soit $(v_{\gamma_2^2}, v_{\gamma_3^2}) \in \ker(\phi_1) \cap (I(\gamma_2^2) \oplus I(\gamma_3^2))$. Alors $\phi_{\gamma_3^1,\gamma_2^2}(v_{\gamma_2^2}) = -\phi_{\gamma_3^1,\gamma_3^2}(v_{\gamma_3^2})$. Puisque, $m(\gamma^0,\gamma_3^1) = 1$, et la suite **(4.13)** définit un complexe différentiel on obtient $\phi_{\gamma_3^1,\gamma_2^2}(v_{\gamma_2^2}) = -\phi_{\gamma_3^1,\gamma_3^2}(v_{\gamma_3^2}) \in \overline{I(\gamma_3^1)}$. Par conséquent, il existe $z \in I(\gamma_2^3) \cap \ker(\phi_{\gamma_1^2,\gamma_2^3})$ tel que $\phi_{\gamma_2^2,\gamma_2^3}(z) = v_{\gamma_2^2}$ et $v_{\gamma_3^2} - \phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(z) \in K_{\gamma_3^2}$. Pour $(v_{\gamma_2^2}, v_{\gamma_3^2})$ on a donc l'égalité,

$$(v_{\gamma_2^2}, v_{\gamma_3^2}) = (v_{\gamma_2^2}, \phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(z)) + (0, v_{\gamma_3^2} - \phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(z)),$$

avec $(v_{\gamma_2^2}, \phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(z)) \in \mathrm{im}(\phi_2)$ et $v_{\gamma_3^2} - \phi_{\gamma_3^2,\gamma_2^3}(z) \in K_{\gamma_3^2}$. Ce qui permet de ramèner l'étude de l'espace $\ker(\phi_1) \cap I(\gamma_2^2) \oplus I(\gamma_2^2)/\mathrm{im}(\phi_{2,3}) \cap I(\gamma_2^2 \oplus I(\gamma_2^2)$ à l'étude de,

$$\ker(\phi_1) \cap I(\gamma_3^2)/\mathrm{im}(\phi_2) \cap I(\gamma_3^2).$$

Notons maintenant,

$$\begin{aligned}
\beta &:= \{(m_1,-m_1),(m_2,-m_3),(m_3,-m_4),(m_4,-m_2)\},\\
\theta\beta &:= \{(m_1,-m_1),(m_2,-m_4),(m_3,-m_2),(m_4,-m_3)\}.
\end{aligned}$$

Considérons le couple suivant des morphismes de Johnson pour $GL(6,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\phi^{GL(6)}_{\beta,\gamma_3^2} &: I(\{\delta(m_2,-m_4),\delta(m_3,-m_3),\delta(m_4,-m_2)\}) \to \\ &\qquad\qquad I(\{\delta(m_2,-m_3),\delta(m_3,-m_4),\delta(m_4,-m_2)\}),\\ \phi^{GL(6)}_{\theta\beta,\gamma_3^2} &: I(\{\delta(m_2,-m_4),\delta(m_3,-m_3),\delta(m_4,-m_2)\}) \to \\ &\qquad\qquad I(\{\delta(m_2,-m_4),\delta(m_3,-m_2),\delta(m_4,-m_3)\}).\end{aligned}$$

De la définition du morphisme $\phi^J_{\beta,\gamma_3^2}$, respectivement $\phi^J_{\theta\beta,\gamma_3^2}$, on obtient l'égalité,

$$\ker(\phi^J_{\beta,\gamma_3^2}) = \delta(m_1,-m_1)\times\ker\phi^{GL(6)}_{\beta,\gamma_3^2},$$

respectivement,

$$\ker(\phi^J_{\theta\beta,\gamma_3^2}) = \delta(m_1,-m_1)\times\ker\phi^{GL(6)}_{\theta\beta,\gamma_3^2}.$$

Considérons aussi les orphismes de Johnson pour $GL(6,\mathbb{R})$ suivants,

$$\begin{aligned}\phi^{GL(6)}_{\gamma_2^1,\gamma_3^2} &: I(\{\delta(m_2,-m_4),\delta(m_3,-m_3),\delta(m_4,-m_2)\}) \to \\ &\qquad\qquad I(\{\delta(m_2,-m_3),\delta(m_3,-m_2),\delta(m_4,-m_4)\}),\\ \phi^{GL(6)}_{\gamma_3^1,\gamma_3^2} &: I(\{\delta(m_2,-m_2),\delta(m_3,-m_4),\delta(m_4,-m_3)\}) \to \\ &\qquad\qquad I(\{\delta(m_2,-m_4),\delta(m_3,-m_2),\delta(m_4,-m_3)\}).\end{aligned}$$

Du lemme **(4.2.9)** on sait que,

$$\ker\phi^{GL(6)}_{\gamma_2^1,\gamma_3^2}\cap\ker\phi^{GL(6)}_{\gamma_3^1,\gamma_3^2} = \ker\phi^{GL(6)}_{\beta,\gamma_3^2}+\ker\phi^{GL(6)}_{\theta\beta,\gamma_3^2}.$$

Par conséquent, on peut écrire,

$$\begin{aligned}\ker(\phi_{1,2})\cap I(\gamma_3^2) &= \ker(\phi_{\gamma_2^1,\gamma_2^2})\cap\ker(\phi_{\gamma_3^1,\gamma_2^2})\\ &= \ker(\phi^J_{\beta,\gamma_3^2})+\ker(\phi^J_{\theta\beta,\gamma_3^2}).\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_1)\cap I(\gamma_2^2)) = \mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi^J_{\beta,\gamma_3^2})\cap\ker(\phi^J_{\theta\beta,\gamma_3^2})). \tag{4.23}$$

Comme en plus,

$$\ker(\phi^J_{\beta,\gamma_3^2})\cap\ker(\phi^J_{\theta\beta,\gamma_3^2}) = \ker\phi^{GL(6)}_{\beta,\gamma_3^2}\cap\ker\phi^{GL(6)}_{\theta\beta,\gamma_3^2}\times I(m_4,-m_4),$$

et de l'exactitude de la suite de Johnson pour $GL(6,\mathbb{R})$ on a,

$$\ker\phi^{GL(6)}_{\beta,\gamma_3^2}\cap\ker\phi^{GL(6)}_{\theta\beta,\gamma_3^2} = \overline{I(\delta(m_1,-m_3)\otimes\delta(m_2,-m_2)\otimes\delta(m_3,-m_1))}.$$

on peut conclure,

$$\begin{aligned}\ker(\phi^J_{\beta,\gamma_3^2})\cap\ker(\phi^J_{\theta\beta,\gamma_3^2}) &= \overline{I(\delta(m_1,-m_3)\otimes\delta(m_2,-m_2)\otimes\delta(m_3,-m_1))}\times\overline{I(m_4,-m_4)}\\ &= \overline{I(\gamma_3^2)}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

On unit l'égalité **(4.23)** et **(4.24)** pour obtenir,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_1) \cap I(\gamma_3^2)) = \overline{I(\gamma_3^2)}.$$

Ce qui nous permet de conclure que,

$$\ker(\phi_1)/\mathrm{im}(\phi_2) = 0.$$

Cran $\mathbf{1} \to \mathbf{0}$,

$$\oplus_{k=1}^3 I(\gamma_k^2) \to \oplus_{j=1}^3 I(\gamma_j^1) \to I(\gamma_0),$$

où,

$$\gamma^0 := \{(m_1, -m_1), (m_2, -m_2), (m_3, -m_3), (m_4, -m_4)\}.$$

Pour chaque $1 \leq j \leq 3$ on a, car $m(\gamma^0, \gamma_j^1) = 1$, l'égalité,

$$\ker(\phi_{\gamma_0, \gamma_j^1}) = \overline{I(\gamma_j^1)}.$$

Comme en plus chaque $\overline{I(\gamma_j^1)},\ 1 \leq j \leq 3$ est contenu dans $\mathrm{im}(\phi_{1,2})$, on conclut,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\ker(\phi_1) \cap I(\gamma_3^2)/\mathrm{im}(\phi_2) \cap I(\gamma_3^2)) = 0.$$

Chapitre 5

Comparaison de resolutions

5.1 Les resolutions à comparer

Comme dans les chapitres précédents soit $\mathbf{G}$ un groupe classique défini sur le corps des réels, quasi-deployé et N la dimension de la représentation standard St : ${}^LG \to GL(N,\mathbb{C})$. Pour $\psi \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$, soit $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G$ le paramètre d'Arthur de $GL(N)$ associé et Π_ψ la représentation irréductible de $GL(N,\mathbb{R})$ attachée à ψ, comme expliqué au chapitre deux, section **(2.1.2)**. Notons par $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ le paquet d'Adams-Johnson associé à ψ_G et définissons comme au chapitre deux, equation **(2.12)**, la somme,

$$\Theta_{\psi_G} = \sum_{\pi \in \Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}} (-1)^{\delta(\pi)} \pi. \tag{5.1}$$

L'objectif du présent chapitre est de prouver le Théoréme **(2.2.2)**. Il nous faut donc montrer l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = (-1)^{l(\psi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\psi_G}), \tag{5.2}$$

où $l(\psi_G)$ est défini comme la longueur de Vogan d'un module standard avec comme unique sous-module irréductible, l'élément de $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ associé au groupe de Levi (défini au chapitre deux section **(2.2)**) quasi-deployé de $\mathbf{G}$, comme explique au chapitre deux section **(2.2)**. Rappelons que d'après le corollaire **(8.9)** de [AJ87] il existe un ensemble fini $\Phi_{\mathbf{G}}$ de L-paramètres de $\mathbf{G}$, de manière à ce que Θ_{ψ_G} puisse être exprimé comme une somme stable de modules standards de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ donnée par,

$$\Theta_{\psi_G} = \sum_{\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}} (-1)^{l(\varphi_G)} \Theta_{\varphi_G}, \tag{5.3}$$

où Θ_{φ_G} est la somme des représentations dans le pseudo-paquet Π_{φ_G} associé à φ_G et $l(\varphi_G)$ la longueur de Vogan de Π_{φ_G}. Par conséquent pour le transfert tordu de Θ_{ψ_G} on a l'égalité,

$$\mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\psi_G}) = \sum_{\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}} (-1)^{l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}). \tag{5.4}$$

Au chapitre deux on a expliqué comme transférer la trace du module standard stable Θ_{φ_G}, c'est égal à la trace tordue du module standard θ_N-invariant associé au L-paramètre $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$ de $GL(N,\mathbb{R})$. Montrer **(5.2)** se réduit donc à montrer l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}} (-1)^{l(\psi_G) - l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}).$$

Soit $\psi = \oplus_{i=1}^r \psi_i$ une decomposition de ψ en somme de paramètres élémentaires comme décrit au chapitre deux. S'il existe $i \in [1,r]$ tel que Π_{ψ_i} est un caractère quadratique de $GL(N_i,\mathbb{R})$ ou l'induite d'un caractère quadratique de $GL(N_i-1,\mathbb{R})$ avec un caractère quadratique de $\mathbb{R}^*$, notons par $\psi_{G_i} \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G}_i)$ le paramètre d'Arthur du groupe classique $\mathbf{G}_i$ qui factorise ψ_i, c'est-à-dire le paramètre tel que,

$$\psi_i : W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_{G_i}} {}^L G_i \rightarrow GL(N_i,\mathbb{C}). \tag{5.5}$$

Le groupe classique $\mathbf{G}_i$ est donné par une des posibilités suivants ; il est égal à $\mathbf{Sp}(N_i-1)$ si $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}(2n)$, égal à $\mathbf{SO}((N_i-1/2)+1,(N_i-1/2))$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p+1,p)$ ou égal à $\mathbf{SO}(N_i/2,N_i/2)$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,p)$, finalement si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(p+1,p-1)$, $\mathbf{G}_i$ est égal à $\mathbf{SO}(N_i/2+1,N_i/2-1)$ si le nombre de entiers $j \in [1,r],\ j \neq i$ avec $n_j = N_j/2$ impair est pair ou zéro et $\mathbf{G}_i = \mathbf{SO}(n_i/2,n_i/2)$ si le nombre de entiers $i \in [1,r],\ j \neq i$ avec $n_j = N_j/2$ pair est impair.

Continuons avec ψ_{G_i} défini par **(5.5)** et notons par $\pi_{\psi_{G_i}}$ l'unique élément du paquet d'Adams-Johnson $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_i}$ de ψ_i (Voir chapitre 4 théorème (**4.1.1**)). Pour $\pi_{\psi_{G_i}}$ (cololIaire **(8.9)** de [AJ87]) il existe un ensemble fini $\Phi_{\mathbf{G}_i}$ des L-paramètres de $\mathbf{G}_i$, de manière à ce que $\pi_{\psi_{G_i}}$ puisse être exprimé comme une somme stable de modules standards de $\mathbf{G}_i(\mathbb{R})$ donnée par,

$$\pi_{\psi_{G_i}} = \sum_{\varphi_{G_i} \in \Phi_{\mathbf{G}_i}} (-1)^{l(\psi_{G_i})-l(\varphi_{G_i})} \Theta_{\varphi_{G_i}}, \tag{5.6}$$

où $\Theta_{\varphi_{G_i}}$ est la somme de représentations dans le pseudo-paquet $\Pi_{\varphi_{G_i}}$ associé à φ_{G_i}, $l(\psi_{G_i})$ la longueur de Vogan du module standard qui a $\pi_{\psi_{G_i}}$ comme unique sous-module irréductible et $l(\varphi_{G_i})$ la longueur de Vogan de $\Pi_{\varphi_{G_i}}$. Cette expression pour π_{ψ_i} nous permet montrer au chapitre 4 section **(4.1)** que,

$$\mathrm{Tr}_\theta(\Pi_{\psi_i}) = \sum_{\varphi_i \in \Phi_i} (-1)^{l_\theta(\psi_i)-l_\theta(\varphi_i)} \mathrm{Tran}^{GL}_{G_i}(\Theta_{\varphi_i}). \tag{5.7}$$

où $\Phi_i = \{\phi_i = \mathrm{St} \circ \phi_{G_i} : \varphi_{G_i} \in \Phi_{\mathbf{G}_i}\}$, $l_\theta(\psi_i) = l(\psi_{G_i})$, $l_\theta(\varphi_i) = l(\varphi_{G_i})$, si $\phi_i = \mathrm{St} \circ \phi_{G_i}$ et $\mathrm{Tran}^{GL}_{G_i}(\Theta_{\varphi_i})$ est le module standard de $GL(N_i,\mathbb{R})$ associé au L-paramètre $\varphi_i = \mathrm{St} \circ \varphi_{G_i}$.

Supposons maintenant que le lemme **(2.2.1)** est vrai pour tout paramètre $\psi_i \in [1,r]$ avec Π_{ψ_i} donnée par une représentation de Speh, $\mathrm{Speh}(\delta_i,n_i)$, $n_i := N_i/2$, basée sur une série discrète de $GL(2,\mathbb{R})$. C'est-à-dire, on suppose que si Φ_i^J est le sous-ensemble de L-paramètres de $GL(N_i,\mathbb{R})$ qu'interviennent dans la resolution de Johnson pour $\mathrm{Speh}(\delta_i,n_i)$ et nous notons par Φ_i le sous-ensemble de Φ_i^J constitué par tout L-paramètre φ_i avec module standard $I(\varphi_i)$ associé, θ_{N_i}-invariant, alors pour la trace tordue de $\mathrm{Speh}(\delta_i,n_i)$ on a l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(\Pi_{\psi_i}) = \sum_{\varphi_i \in \Phi_i} (-1)^{l_\theta(\psi_i)-l_\theta(\varphi_i)} \mathrm{Tr}_{\theta_{N_i}}(I(\varphi_i)), \tag{5.8}$$

où $l_\theta(\psi_i)$ respectivement $l_\theta(\varphi_i)$ est la θ-longueur de $I(\delta_i,n_i)$ respectivement $I(\varphi_i)$.

Par conséquent du lemme **(2.2.2)** on a pour la trace tordue de $\Pi_\psi = \times_{i=1}^r \Pi_{\psi_i}$ l'égalité,

$$\mathrm{Tr}_{\theta_N}(\Pi_\psi) = \sum_{\varphi \in \Phi} (-1)^{l_\theta(\psi)-l_\theta(\varphi)} \mathrm{Tr}_{\theta_N}(I(\varphi)), \tag{5.9}$$

où on a noté Φ pour l'ensemble,

$$\Phi = \{\varphi = \oplus_{i=1}^r \varphi_i : \ \varphi_i \in \Phi_i\},$$

$I(\delta_\varphi)$ pour le module standard associé à φ et $l_\theta(\varphi)$, $\varphi = \oplus_{i=1}^t \varphi_i$, pour la somme $l_\theta(\varphi) = \sum_{i=1}^t l_\theta(\varphi_i)$.

Pour $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ notons par $l(\psi_G)$ la longueur de Vogan du pseudo-paquet associé au L-paramètre φ_{ψ_G}, alors les égalités **(5.4)** et **(5.9)** nous permettent de ramèner la preuve de **(5.2)** à prouver l'égalité,

$$\sum_{\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}} (-1)^{l(\psi_G)-l(\varphi_G)} \mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}) = \sum_{\varphi \in \Phi} (-1)^{l_\theta(\psi)-l_\theta(\varphi)} \mathrm{Tr}_{\theta_N}(I(\varphi)). \tag{5.10}$$

La preuve de cette dernière égalité se fera en deux parties. D'abord on montre que tout module standard qu'intervient à gauche de l'égalité **(5.10)** intervient aussi à droite et vice-versa. On aura besoin du lemme suivant,

Lemme 5.1.1. *L'application, $\varphi_G \mapsto \varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$, définit une bijection entre $\Phi_{\mathbf{G}}$ et l'ensemble de L-paramètres Φ.*

Le lemme prouvé, la définition de transfert décrit par Mezo nous donne pour tout paramètre $\varphi := \mathrm{St} \circ \varphi_G$ l'égalité,

$$\mathrm{Tran}_G^{GL}(\Theta_{\varphi_G}) = I(\varphi).$$

Par conséquent tout module standard qu'intervient à gauche de l'égalité **(5.10)** intervient aussi à droite et vice-versa.

Montrer l'égalité **(5.10)** se ramène donc à montrer que le signe avec lequel intervient chaque module standard dans **(5.4)** est celui avec lequel intervient le même module standard dans **(5.9)**,

Comme $\varphi_\psi = \mathrm{St} \circ \varphi_{\psi_G}$ la deuxième partie de la preuve consiste donc à montrer le lemme suivant,

Lemme 5.1.2. *Pour tout $\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}$, soit $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$. Alors on a l'égalité,*

$$l(\varphi_G) = l_\theta(\varphi). \tag{5.11}$$

Ce qui nous donne l'égalité **(5.10)** et par conséquent la véracité du théorème **(2.2.2)**.

Le reste du chapitre sera structuré de la façon suivante ; dans la section **(5.2)** on donne la preuve des lemmes **(5.1.1)** et **(5.1.2)** dans le cas d'un paramètre élémentaire pour finir dans la section **(5.3)** avec le cas de ψ_G général.

5.2 Le cas d'un paramètre élémentaire

Si pour le paramètre élémentaire ψ la représentation Π_ψ est définie par un caractère de $GL(N, \mathbb{R})$ ou l'induite d'un caractère de $GL(N-1, \mathbb{R})$ avec un caractère de $\mathbb{R}^*$ il n'y a rien à prouver, les lemmes **(5.1.1)** et **(5.1.2)** on les obtient automatiquement par construction, comme on peut voir dans **(5.7)**. On va se restreindre donc aux paramètres ψ avec Π_ψ définie par une représentation de Speh, $\mathrm{Speh}(\delta, n)$, $2n = N$, basée sur une série discrète δ de $GL(2, \mathbb{R})$ de caractère infinitésimal $(p/2, -p/2)$, $p \in \mathbb{Z}_{>0}$.
Notons par $\psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(G)$ le paramètre d'Arthur du groupe classique $\mathbf{G}$ qui factorise ψ, c'est-à-dire le paramètre tel que,

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times SL(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_G} {}^L G \rightarrow GL(N, \mathbb{C}).$$

Le groupe classique $\mathbf{G}$ est donné par une des possibilités suivantes

$$\mathbf{G} = \begin{cases} \mathbf{SO}(n, n+1), \\ \mathbf{SO}(n, n), \\ \mathbf{SO}(n-1, n+1). \end{cases}$$

Avec l'entier n soumis, dans le cas orthogonal pair, à la restriction $n \in 2\mathbb{N}$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(n, n)$ et $n \in 2\mathbb{N}+1$ si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(n+1, n-1)$. En plus l'entier positif p associé à δ, doit être choisi de manière à ce que,

$$\Gamma = \{2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_n\}, \tag{5.12}$$

où,

$$m_i := (p+n-1)/2 - i + 1, \quad i \in [1, n],$$

soit un sous-ensemble de $2\mathbb{Z}+1$ si $\mathbf{G}$ est un groupe orthogonal impair ou un sous-ensemble de $2\mathbb{Z}$ si $\mathbf{G}$ est un groupe orthogonal pair.

Avant de donner la preuve des lemmes **(5.1.1)** et **(5.1.2)** on aura besoin d'une description des L-paramètres contenus dans $\Phi_{\mathbf{G}}$, respectivement Φ.

5.2.1 Caractérisation de l'ensemble de paramètres intervenant dans la resolution d'une représentation cohomologique pour un groupe classique

Au chapitre deux section **(2.2)** on a pu voir que toute représentation dans $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ est associée à un sous-groupe de Levi. Dans le cas présent l'ensemble des groupes de Levi à considérer est donné par,

$$\mathbf{U}(p, q) \text{ avec } p + q = n.$$

Notons par $\mathbf{L}$ le groupe,

$$\mathbf{L} = \begin{cases} \mathbf{U}(n/2, n/2) & \text{si } n \text{ est pair et } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(n+1, n) \text{ ou } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(n, n), \\ \mathbf{U}(n+1/2, n-1/2) & \text{si } n \text{ est impair et } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(n+1, n) \text{ ou } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(n+1, n-1). \end{cases}$$

Soit π la représentation dans $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}(G)$ associée à $\mathbf{L}$, d'après le chapitre deux section **(2.2)**, equation **(2.7)**, π s'obtient par induction cohomologique à partir d'un caractère ξ de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ de différentiel,

$$(p'/2, \cdots, p'/2),$$
$$p' = \begin{cases} p - n & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(2n+1), \\ p - n + 1 & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(n, n),\ \mathbf{SO}(n+1, n-1) \end{cases}$$

et du théorème **(1)** du chapitre 6 de **[Joh84]** tout module standard qui intervient dans la resolution de π s'obtient, après induction cohomologique, d'un module standard de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ dans la resolution de ξ. En plus, d'après le théorème **(1)** du chapitre 5 de **[Joh84]**, un module standard X de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ intervient dans la resolution de ξ si et seulement si le caractère infinitésimal de X est donné par $\xi + \rho_L$ (plus correctement l'orbite de $\xi + \rho_L$ sous l'action de $W(\mathbf{T}, \mathbf{L})$), c'est-à-dire, si et seulement si le caractère infinitésimal de X est possible d'être représenté par une permutation, par un élément de $W(\mathbf{T}, \mathbf{L}) = S_n$, du vecteur,

$$(m'_1, m'_2, \cdots, m'_n). \tag{5.13}$$

où,

$$m'_i := (p' + n - 1)/2 - i + 1, \quad i \in [1, n],$$

Choisissons une permutation $s : [1, n] \to [1, n]$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$ et définissons les ensembles,

$$I_0^s := \{j \in [1, n] : s(j) \neq j,\ j < s(j)\},$$
$$I_1^s := \{j \in [1, n] : s(j) = j\}.$$

Soit d_0, respectivement d_1, la cardinalité de I_0^s, respectivement I_1^s et notons par $k_{(\cdot)} : [1, d_0] \to I_0^s$, respectivement $l_{(\cdot)} : [1, d_1] \to I_1^s$, une bijection tel que $k_1 < k_2 < \cdots < k_{d_0}$, respectivement $l_1 < l_2 < \cdots < l_{d_1}$.

Soit maintenant $\mathbf{L}_{d_1}$ égal à $\mathbf{U}(d_1/2, d_1/2)$ si d_1 est pair ou égal à $\mathbf{U}(d_1 - 1/2, d_1 + 1/2)$ si d_1 est impair et considérons le L-paramètre $\varphi_{d_1}^s : W_{\mathbb{R}} \to {}^L L_{d_1}$ donné par,

$$\begin{aligned} \varphi_{d_1}(z) &= ((z/\bar{z})^{m'_{l_1}}, \cdots, (z/\bar{z})^{m'_{l_{d_1}}}), \\ \varphi_{d_1}(j) &= n_L \times \sigma, \end{aligned} \tag{5.14}$$

où,

$$n_L = \begin{pmatrix} & & (-1)^{d_1} \\ & \iddots & \\ -1 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

À chaque permutation $s : [1, n] \to [1, n]$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$ on attache la classe d'équivalence du morphisme admissible $\varphi_L : W_{\mathbb{R}} \to {}^L L$ défini par,

$$\begin{aligned} \varphi_L(z) &= (z^{m'_{k_1}} \bar{z}^{-m'_{s(k_1)}}, \cdots, z^{m'_{k_{d_0}}} \bar{z}^{-m'_{s(k_{d_0})}}, \varphi_{d_0}(z), z^{m'_{s(k_{d_0})}} \bar{z}^{-m'_{k_{d_0}}}, \cdots, z^{m'_{s(k_1)}} \bar{z}^{-m'_{k_1}}), \\ \varphi_L(j) &= \begin{pmatrix} e_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & n_L & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e_{2d_0} \end{pmatrix} \times \sigma. \end{aligned} \tag{5.15}$$

où,

$$e_j e_{2d_0+1-j} = (-1)^{m'_{k_j} + m'_{s(k_j)}}, \quad j \in [1, d_0].$$

Soit,

$$\lambda_{\varphi_{d_1}} = (m'_{l_1}, \cdots, m'_{l_{d_1}}),$$

Le paquet de Langlands $\Pi_{\varphi_{d_1}}$ associé à φ_{d_1} est l'ensemble des représentations de la série discrète correspondants à l'orbite de λ_{d_1} sous l'action du groupe de Weyl (modulo le groupe de Weyl réel) de $\mathbf{L}_{d_1}$. Par conséquent attaché au morphisme φ_L on a le pseudo L-paquet, Π_{φ_L}, constitué par les modules standards de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ définis par,

$$\chi_1 \times \cdots \times \chi_{d_0} \times \tau. \tag{5.16}$$

avec,

$$\chi_j(z) = z^{m_{k_j}} \overline{z}^{m_{s(k_j)}}, \quad j \in [1, d_0].$$

et τ une représentation de la série discrète contenue dans $\Pi_{\varphi_{d_1}}$. Tout module standard qui vient d'être décrit à un caractère infinitésimal possible d'être représenté par,

$$(m'_{k_1}, \cdots, m'_{k_{d_0}}, m'_{l_1}, \cdots, m'_{l_{d_1}}, m'_{s(k_{d_0})}, \cdots, m'_{s(k_1)}). \tag{5.17}$$

Comme **(5.17)** est clairement une permutation de **(5.13)** tout module standard décrit par **(5.16)** intervient dans la resolution de ξ. En plus, il est facile de voir que tout module standard qui intervient dans la resolution de ξ est associé à un L-paramètre de $\mathbf{L}$ défini par **(5.15)** à partir d'une permutation s de $[1, n]$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$.

On note $\Phi_{\mathbf{L}}$ l'ensemble des L-paramètres de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ définis par **(5.15)** à partir de toute permutation s de $[1, n]$ avec $s^2 = \mathrm{Id}$. On veut montrer l'égalité,

$$\Phi_{\mathbf{G}} = \{\varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L, \ \varphi_L \in \Phi_L\}, \tag{5.18}$$

(voir section **(2.2)** equation **(2.6)**, pour la définition de $\iota_{G,L}$). Soit $\varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L, \ \varphi_L \in \Phi_L$. D'après le lemme **(8.8)** de **[AJ87]** tout module standard du pseudo L-paquet Π_{φ_G}, intervient dans la somme **(5.1)**, d'où on obtient que $\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}$.

Considérons maintenant une représentation $\pi \in \Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ quelconque. Il existe $w \in W(\mathbf{T}, \mathbf{G})$ tel que π s'obtient par induction cohomologique à partir du caractère $w\xi$ de $\mathbf{L}_w(\mathbb{R})$, le groupe de Levi avec $\mathfrak{l}_w = w\mathfrak{l}w^{-1}$ comme algèbre de Lie associée. En plus tout module standard dans la resolution de π s'obtient, après induction cohomologique, d'un module standard dans la resolution de $w\xi$ et comme dans le cas de ξ, un module standard intervient dans la resolution de $w\xi$ si et seulement son caractère infinitésimal est possible d'être représenté par $w\xi + \rho_{L_w}$. Supposons que $w\xi + \rho_{L_w}$ peut d'être représenté par un vecteur, $(\xi^w_1, \cdots, \xi^w_n)$, définissons $\Gamma_w = \{\xi^w_1, \cdots, \xi^w_n\}$, alors pour tout $x \in \{m'_1, \cdots, m'_n\}$ on a $x \in \Gamma_w$ ou $-x \in \Gamma_w$. Comme ${}^L L \cong {}^L L_w$ on peut voir que tout module standard stable dans la resolution de $w\xi$ est parametré par un L-paramètre φ_{L_w} défini comme dans **(5.15)** à partir d'une permutation s de $[1, n]$ (tel que $s^2 = \mathrm{Id}$) mais avec Γ_w au lieu de $\{m'_1, \cdots, m'_n\}$ et soumis à la restriction que l'entier d_0 ne doit pas être plus grand que la dimension de la partie deployé du groupe de Cartan maximalement deployé de $\mathbf{L}_w(\mathbb{R})$. Par conséquent pour tout L-paramètre φ_{L_w} (qu'intervient dans la resolution de $w\xi$) il existe un L-paramètre $\varphi_L \in \Phi_{\mathbf{L}}$ tel que $\iota_{G,L_w} \circ \varphi_{L_w} \cong \iota_{G,L} \circ \varphi_L$. Ce qui nous permet de conclure l'égalité **(5.18)**.

5.2.2 Caractérisation de l'ensemble de paramètres intervenant dans la resolution d'un module de Speh basé sur une série discrète

Soit $\mathcal{L}'$ le centralisateur de ψ dans $GL(N, \mathbb{C})$. On peut facilement voir que,

$$\mathcal{L}' \cong GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}).$$

Soit $\mathbf{L}'$ tel que $\mathbf{L}'(\mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{C})$, alors $\widehat{\mathbf{L}'} \cong \mathcal{L}'$. Comme au chapitre deux (equation **(2.6)**) on veut définir une inclusion,

$$\iota : {}^L L' \to GL(N, \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}},$$

qui étend $\widehat{\mathbf{L}'} \cong \mathcal{L}'$. Pour cela, pour $z \in \mathbb{C}^*$, on définit,

$$\iota(z) := ((z/|z|)^n, (z/|z|)^{-n}, \cdots, (z/|z|)^n, (z/|z|)^{-n}),$$

si $\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{Sp}(N,\mathbb{C})$ et,

$$\iota(z) := ((z/|z|)^{n-1}, (z/|z|)^{-n+1}, \cdots, (z/|z|)^{n-1}, (z/|z|)^{-n+1}),$$

si $\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{SO}(N,\mathbb{C})$. On définit aussi,

$$\iota(j) := \mathcal{N} \rtimes j,$$

avec,

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{N}_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $i \in [1,n]$,

$$\mathcal{N}_i := \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{Sp}(N,\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_i := \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{SO}(N,\mathbb{C}).$$

Tel comme pour le paramètre ψ_G de $\mathbf{G}$, pour ψ existe un paramètre d'Arthur,

$$\psi_{L'} : W_{\mathbb{R}} \times SL(2,\mathbb{C}) \to {}^L L',$$

de manière à ce que, à conjugaison prés, $\psi = \iota \circ \psi_{L'}$. La correpondance de Langlands attache à $\varphi_{\psi_{L'}|W_{\mathbb{R}}}$ un caracère ξ' de $\mathbf{L}'(\mathbb{R})$ de différentiel,

$$(p'/2, -p'/2, \cdots, p'/2, -p'/2)$$

et on sait que Π_ψ s'obtient à partir de ξ' après induction cohomologique. Pour décrire Φ on s'appuie comme dans la section précéndent dans le travaux de J. Johnson. D'après le théorème **(1)** du chapitre 6 de **[Joh84]**, tout module standard dans la resolution de Π_ψ s'obtient, après induction cohomologique, d'un module standard de $\mathbf{L}'(\mathbb{R})$ dans la resolution de ξ'. En plus du théorème **(1)** du chapitre 5 de **[Joh84]** un module standard X de $\mathbf{L}'(\mathbb{R})$ intervient dans la resolution de ξ' si et seulement si le caractère infinitésimal de X est possible d'être représenté par une permutation, par un élément de $W(\mathbf{T},\mathbf{L}') = S_n \times S_n$, du vecteur,

$$(m_1', -m_n', m_2', -m_{n-1}', \cdots, m_{n-1}', -m_2', m_n', -m_1'). \tag{5.19}$$

Prenons une permutation s de $[1,n]$ et définissons,

$$\varphi_{L',s}(z) = (z^{m_1'}\overline{z}^{-m_{s(1)}'}, z^{-m_{s(1)}'}\overline{z}^{m_1'}, \cdots, z^{m_n'}\overline{z}^{-m_{s(n)}'}, z^{-m_{s(n)}'}\overline{z}^{m_n'}), \tag{5.20}$$

$$\varphi_{L',s}(j) = (1, -1^{m_1'+m_{s(1)}'}, \cdots, 1, -1^{m_n'+m_{s(n)}'}) \times \sigma. \tag{5.21}$$

Le caractère infinitésimal du module standard Y de $\mathbf{L}'(\mathbb{R})$ associé à $\varphi_{L',s}$, est possible d'être représenté par,

$$(m_1', -m_{s(1)}', m_2', -m_{s(2)}', \cdots, m_{n-1}', -m_{s(n-1)}', m_n', -m_{s(n)}'). \tag{5.22}$$

Comme **(5.22)** est une permutation par s de **(5.19)**, le module standard Y intervient dans la resolution de ξ'. Il est en plus facile de se convaincre que tout module standard qui intervient dans la resolution de ξ' est attaché à un L-paramètre de $\mathbf{L}'$ défini par **(5.20)** à partir d'une permutation s de $[1, n]$.

Considérons maintenant le paramètre $\varphi = \iota \circ \varphi_{L',s}$ de $GL(N)$. Pour φ on a l'égalité,

$$\varphi = \bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

où,

$$\varphi_i(z) = \left(z^{m_i}\overline{z}^{-m_{s(i)}}, z^{-m_{s(i)}}\overline{z}^{m_i}\right), \ z \in \mathbb{C}^\times$$
$$\varphi_i(j) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{m_i+m_{s(i)}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associé donc à φ on a le module standard,

$$\times_{i=1}^{n} \delta(m_{\kappa(i)}, -m_{s(\kappa(i))}),$$

avec $\kappa : [1, n] \to [1, n]$ une bijection tel que, $m_{\kappa(1)} - m_{s(\kappa(1))} \leq m_{\kappa(2)} - m_{s(\kappa(2))} \cdots \leq m_{\kappa(n)} - m_{s(\kappa(n))}$. Et comme $\times_{i=1}^{n} \delta(m_{\kappa(i)}, -m_{s(\kappa(i))})$ est θ_N-invariant si et seulement si s est une involution, pour Φ, on a l'égalite,

$$\Phi = \{\varphi = \iota \circ \varphi_{L',s} : s^2 = \mathrm{Id}\}.$$

5.2.3 Comparaison des paramètres

Comme $\widehat{\mathbf{L}} \cong \mathcal{L} = \mathrm{Cent}(\psi_{\mathbf{G}}(\mathbb{C}^*))$, respectivement $\widehat{\mathbf{L}}' \cong \mathcal{L}' = \mathrm{Cent}(\psi(\mathbb{C}^*))$, l'inclusion $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ peut être étendue en une inclusion,

$$\iota_{L',L} : \ {}^{L}L \to \ {}^{L}L'.$$

Il suffit pour cela de définir, $\iota_{L',L}|_{\mathbb{C}^*} = \mathrm{Id}$ et,

$$\iota_{L',L}(j) = \begin{cases} I_N & \text{si } \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{Sp}(N, \mathbb{C}) \text{ et } n \text{ pair,} \\ I_{n+2} \times I_{n-2} & \text{si } \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{Sp}(N, \mathbb{C}) \text{ et } n \text{ impair,} \\ I_n \times -I_n & \text{si } \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{SO}(N, \mathbb{C}) \text{ et } n \text{ pair,} \\ I_N & \text{si } \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{SO}(N, \mathbb{C}) \text{ et } n \text{ impair.} \end{cases}$$

On obtient donc, le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} {}^{L}G \arrow[r, "\mathrm{St}"] & GL(N, \mathbb{C}) \\ {}^{L}L \arrow[u, "\iota_{G,L}"] \arrow[r, "\iota_{L',L}"] & {}^{L}L' \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} \tag{5.23}$$

Donnons maintenant la preuve du lemme **(5.1.1)**.

Preuve. Soit φ_L, respectivement $\varphi_{L'}$, le L-paramètre de $\mathbf{L}$, respectivement $\mathbf{L}'$, défini par **(5.15)**, respectivement **(5.20)**, à partir de une permutation s de $[1, n]$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$. On peut facilement vérifier que,

$$\iota \circ \iota_{L',L} \circ \varphi_L \cong \iota \circ \varphi_{L'}. \tag{5.24}$$

Comme $\varphi_{L'} \mapsto \iota \circ \varphi_{L'}$ nous donne une bijection entre l'ensemble des L-paramètre de $\mathbf{L}'$ définis par **(5.20)** à partir d'une permutation s de $[1,n]$ (tel que $s^2 = \mathrm{Id}$) et Φ, on peut d'après **(5.24)** conclure que la flèche vertical de droite de **(5.23)** définit une bijection entre l'ensemble,

$$\Phi_{\mathbf{L}'} = \{\varphi_{L'} = \iota_{L',L} \circ \varphi_L : \varphi_L \in \Phi_{\mathbf{L}}\} \tag{5.25}$$

et Φ. On a vu aussi que la flèche vertical de gauche de **(5.23)** définit une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}}$ et $\Phi_{\mathbf{G}}$, par conséquent la bijection entre $\Phi_{\mathbf{G}}$ et Φ donnée par la fleche horizontale dans haut de **(5.23)** s'obtient du fait que pour tout $\varphi_L \in \Phi_{\mathbf{L}}$ on a,

$$\mathrm{St} \circ \iota_{G,L} \circ \varphi_L \cong \iota \circ \iota_{L',L} \circ \varphi_L.$$

□

5.2.4 Comparaison entre la longueur et la θ-longueur

Donnons maintenant la preuve du lemme **(5.1.2)**

Preuve. Soit $\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}$, on veut pour tout L-paramètre $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$ prouver l'égalité,

$$l_\theta(\varphi) = l(\varphi_G).$$

Associé a φ_G on a un L-paramètre de $\mathbf{L}$, $\varphi_L \in \Phi_{\mathbf{L}}$ tel que, $\varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L$. Le $L-$paramètre φ_L est défini par **(5.15)** à partir de une permutation $s : [1,n] \to [1,n]$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$ comme explique dans la section **(5.1.1)**. Tout module standard dans le pseudo-paquet Π_{φ_L} de φ_L a un caractère infinitésimal possible d'être représenté par,

$$\lambda = (m'_{k_1}, \cdots, m'_{k_{d_0}}, m'_{l_1}, \cdots, m'_{l_{d_1}}, m'_{s(k_{d_0})}, \cdots, m'_{s(k_1)}). \tag{5.26}$$

Soit maintenant $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$. Le module standard θ-invariant de $GL(N, \mathbb{R})$ associé à φ est donné par,

$$(\times_{i=1}^{d_0} \delta(m_{k_i}, -m_{s(k_i)}) \times (\times_{i=1}^{d_1} \delta(m_{l_i}, -m_{l_i})) \times (\times_{i=1}^{d_0} \delta(m_{s(k_{d_0+1-i})}, -m_{k_{d_0+1-i}})).$$

Considérons l'ensemble,

$$\gamma := \{(m_{k_j}, -m_{s(k_j)}), (m_{s(k_j)}, -m_{k_j})\}_{j=1}^{d_0} \cup \{(m_{l_j}, -m_{l_j})\}_{j=1}^{d_1}$$

et rappelons que la θ-longueur $l_\theta(\varphi)$ (définition **(4.2.4)**) est défini comme la cardinalité de l'ensemble des orbites de θ dans,

$$\mathcal{E}(\gamma) = \{(m_u, -m_{u'}) \times (m_v, -m_{v'}) : (m_u, -m_{u'}) \in \gamma, (m_v, -m_{v'}) \in \gamma \text{ et } m_u > m_v, m_{u'} < m_{v'}\}.$$

Avant de passer à la longueur de φ_G, faisons la remarque suivante.

Remarque 5.2.1. *Soit $\pi \in \Pi^{AJ}_{\psi_G}$, $\mathbf{L}$ le groupe de Levi associé à π. Considérons un module standard X_π dans la resolution de π. Notons par θ_{car}, l'involution de Cartan. Associé à X_π on a d'après le théorème **(1)** du chapitre 6 de **[Joh84]** un triplet $(H, \Delta^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \cup \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}), \chi)$, où H est un groupe de Cartan θ_{car}-invariant, $\mathfrak{u}$ la partie nilpotent de l'algèbre de lie $\theta_{\mathrm{car}}-$invariante, $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ et χ un caractère de H trivial sur H_0. En plus si nous notons par ξ_π le caractère de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ qu'a comme image après induction cohomologique la représentation π, alors le module standard Y_π dans la resolution de ξ qui est paramètré par* *le triplet $(H, \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}), \chi)$ a comme image après induction cohomologique le module standard X_π.*

Pour tout groupe de Cartan H ecrivons, $H = T_H A_H$, où $T_H := K \cap H$ et A_H est un group de vecteurs. La longueur de Vogan de X_π est alors défini comme la longueur de $(H, \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) \cup \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}), \chi)$, qui est donné par,

$$\frac{1}{2}\mathrm{card}(\{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) \cup \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}) : \theta_{\mathrm{car}}(\alpha) \notin \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) \cup \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})\}) + \frac{1}{2}\dim(A_H) - \frac{1}{2}\dim(A_{H_f}),$$

où H_f définit un groupe de Cartan fondamental de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Comme $\theta_{\mathrm{car}}\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ on a $\theta_{\mathrm{car}}(\alpha) \in \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}) \subset \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) \cup \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ d'où la longueur de X_π est égal au longueur de Y_π, c'est à dire égal à

$$\frac{1}{2}\mathrm{card}(\{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) : \theta_{\mathrm{car}}(\alpha) \notin \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h})\}) + \frac{1}{2}\dim(A_H) - \frac{1}{2}\dim(A_{H_f}).$$

Par conséquent X_π intervient dans la resolution de π avec le même signe que Y_π le fait dans la resolution de ξ_π.

Notons par H le groupe de Cartan de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ avec dimension de la partie deployé égal à d_0. On fait noter que d_0 correspond aussi au nombre des orbites de longueur un dans $\mathcal{E}(\gamma)$. Soit Δ^+ le systeme de racines positives de $\Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h})$ défini par,

$$\Delta^+ := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) : \alpha(\lambda) > 0\}.$$

D'après la remarque, la longueur de tout module standard contenu dans le pseudo-paquet associé à φ_G est égal à la longueur de tout module standard dans le pseudo-paquet associé à φ_L, c'est-à-dire égal à,

$$l(\varphi_L) = \frac{1}{2}\mathrm{card}(\{\alpha \in \Delta^+ : \theta_{\mathrm{car}}(\alpha) \notin \Delta^+\}) + \frac{1}{2}\dim(A_H).$$

On rappelle que dans notre cas, la dimension de la partie deployé du groupe de Cartan fondamental H_f de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ est zéro.

Avant de pouvoir comparer la longueur de φ_G avec la θ-longueur de $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$, ils nous faut comprendre la façon dont θ_{car} agit sur chaque racine de Δ^+. On donnera pour cela une description de l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ du groupe H. Tout élément $h \in \mathfrak{h}^0$ est donné par une matrice diagonale par blocs,

$$h := \begin{pmatrix} z_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & z_{d_0} & & & & \\ & & & \mathfrak{h}_c & & & \\ & & & & -\overline{z_{d_0}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\overline{z_1} \end{pmatrix}, \ z_j \in \mathbb{C}, \ j \in [1, d_0],$$

avec le bloc $\mathfrak{h}_0$ défini par,

$$\mathfrak{h}_c := \begin{pmatrix} ia_{d_0+1} & & & & ib_{d_0+1} \\ & ia_{d_0+2} & & ib_{m+\frac{d-1}{2}} & \\ & & \ddots & & \\ & ib_{d_0+2} & & ia_{d_0+2} & \\ ib_{d_0+1} & & & & ia_{d_0+1} \end{pmatrix}, \ a_j, \ b_k \in \mathbb{R}. \qquad (5.27)$$

Sur tout matrice $\mathfrak{h}_c$ définie par **(5.27)** définissons,

$$\begin{aligned} f_i(\mathfrak{h}_c) &= ia_i, \quad & i \in [d_0+1, d_0+[d_1+1/2]], \\ l_i(\mathfrak{h}_c) &= ib_i, \quad & i \in [d_0+1, d_0+[d_1/2]]. \end{aligned}$$

Notons par x la matrice,

$$x = \begin{pmatrix} i & 0 & \cdots & 0 & i \\ 0 & i & \cdots & i & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & i & \cdots & -i & 0 \\ i & 0 & \cdots & 0 & -i \end{pmatrix},$$

après conjugaison par $y := \det(x)^{-1}x$ on obtient pour toute matrice $\mathfrak{h}_c$ définie par **(5.27)** l'égalité,

$$y^{-1}\mathfrak{h}_c y^1 = \begin{pmatrix} ia_{d_0+1} - ib_{d_0+1} & & \\ & \ddots & \\ & & ia_{d_0+1} + ib_{d_0+1} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent pour tout $j \in [d_0+1, d_0+[d_1+1/2]]$,

$$\begin{aligned} (f_j - h_j) \circ \mathrm{Ad}_{x^{-1}} &= e_j, \\ (f_j + h_j) \circ \mathrm{Ad}_{x^{-1}} &= e_{d_0+d_1+1-j}. \end{aligned}$$

et comme,

$$\begin{aligned} \theta_{\mathrm{car}}(f_i) &= f_i, \\ \theta_{\mathrm{car}}(h_i) &= h_i. \end{aligned}$$

on peut pour tout $j \notin [d_0+1, d_0+d_1]$ conclure,

$$\theta_{\mathrm{car}} e_j = e_j.$$

Comme en plus,

$$\theta_{\mathrm{car}} e_i = e_{n+1-i}, \quad i \in [1, d_0] \cup [d_0+d_1, n],$$

pour tout $e_i - e_j \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}),\ i < j$, on obtient l'identité,

$$\theta_{\mathrm{car}}(e_i - e_j) = \begin{cases} -(e_{n+j-1} - e_{n+i-1}) & \text{si } i, j \in [1, d_0] \cup [d_0+d_1+1, n], \\ -(e_j - e_{n+1-i}) & \text{si } i \in [1, d_0],\ j \in [d_0+1, d_0+d_1], \\ -(e_{n+1-j} - e_i) & \text{si } i \in [d_0+1, d_0+d_1],\ j \in [d_0+d_1+1, n]. \end{cases}$$

Maintenant pour tout racine $\pm(e_i - e_j) \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}),\ i < j$, définissons $R(\pm(e_i - e_j))$ par,

1. $(m_{k_i}, -m_{s(k_i)}) \times (m_{k_j}, -m_{s(k_j)})$ si $i, j \in [1, d_0]$,
2. $(m_{k_i}, -m_{s(k_i)}) \times (m_{s(k_{n+1-j})}, -m_{k_{n+1-j}})$ si $i \in [1, d_0]$ et $j \in [d_0+d_1+1, n]$,
3. $(m_{k_i}, -m_{s(k_i)}) \times (m_{l_j}, -m_{l_j})$ si $i \in [1, d_0]$ et $j \in [d_0+1, d_0+d_1]$,
4. $(m_{l_i}, -m_{l_i}) \times (m_{l_j}, -m_{l_j})$ si $i, j \in [d_0+1, d_1+d_0]$,
5. $(m_{l_i}, -m_{l_i}) \times (m_{s(k_{n+1-j})}, -m_{k_{n+1-j}})$ si $i \in [d_0+1, d_0+d_1]$ et $j \in [d_0+d_1+1, n]$,
6. $(m_{s(k_{n+1-i})}, -m_{k_{n+1-i}}) \times (m_{s(k_{n+1-j})}, -m_{k_{n+1-j}})$ si $i, j \notin [d_0+d_1+1, n]$.

On a le résultat suivant,

Lemme 5.2.1. *La restriction de l'application $\alpha \mapsto R(\alpha)$, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ à Δ^+, définit un bijection entre Δ^+ et $\mathcal{E}(\gamma)$,*

Preuve. Notons que $\alpha \in \Delta^+$ si et seulement si $-\theta_{\mathrm{car}}\alpha \in \Delta^+$. Par conséquent pour montrer la bijection il suffit de verifier que ;

La paire $\{e_i - e_j, e_{n+1-j} - e_{n+1-i}\}, i < j,\ i, j \in [1, d_0]$ est un sous-ensemble de Δ^+ ssi $(e_i - e_j)(\lambda) = m'_{k_i} - m'_{k_j} = m_{k_i} - m_{k_j} > 0$ et $e_{n+1-j} - e_{n+1-i}(\lambda) = m'_{s(k_j)} - m'_{s(k_i)} = m_{s(k_j)} - m_{s(k_i)} > 0$ ssi $m_{k_i} > m_{k_j}$ et $m_{s(k_i)} < m_{s(k_j)}$ ssi $\{(m_{k_i}, -m_{s(k_i)}) \times (m_{k_j}, -m_{s(k_j)}), (m_{s(k_j)}, -m_{k_j}) \times (m_{s(k_i)}, -m_{k_i})\} \subset \mathcal{E}(\gamma)$.

La paire $\{e_i - e_j, e_{n+1-j} - e_{n+1-i}\}, i \in [1, d_0],\ j \in [d_0 + d_1 + 1, n]$ est un sous-ensemble de Δ^+ ssi $(e_i - e_j)(\lambda) = m'_{k_i} - m'_{s(k_{n+1-j})} = m_{k_i} - m_{s(k_{n+1-j})} > 0$ et $e_{n+1-j} - e_{n+1-i}(\lambda) = m'_{k_{n+1-j}} - m'_{s(k_i)} = m_{k_{n+1-j}} - m_{s(k_i)} > 0$ ssi $m_{k_i} > m_{s(k_{n+i-j})}$ et $m_{s(k_i)} < m_{k_{n+1-j}} > 0$ ssi $\{(m_{k_i}, -m_{s(k_i)}) \times (m_{s(k_{n+1-j})}, -m_{k_{n+1-j}}), (m_{k_{n+1-j}}, -m_{s(k_{n+1-j})}) \times (m_{s(k_i)}, -m_{k_i})\} \subset \mathcal{E}(\gamma)$.

La paire $\{e_i - e_j, e_j - e_{n+1-i}\},\ i \in [1, d_0],\ j \in [d_0 + 1, d_0 + d_1]$ est un sous-ensemble de Δ^+ ssi $(e_i - e_j)(\lambda) = m'_{k_i} - m'_{l_j} = m_{k_i} - m_{l_j} > 0$ et $e_{n+1-j} - e_{n+1-i}(\lambda) = m'_{l_j} - m'_{s(k_i)} = m_{l_j} - m_{s(k_i)} > 0$ ssi $m_{k_i} > m_{l_j}$ et $m_{s(k_i)} < m_{l_j}$ ssi $\{(m_{k_i}, -m_{s(k_i)}) \times (m_{l_j}, -m_{l_j}), (m_{l_j}, -m_{l_j}) \times (m_{s(k_i)}, -m_{k_i})\} \subset \mathcal{E}(\gamma)$. □

Finalement comme,

$$l_\theta(\gamma) = \frac{1}{2}\mathrm{card}(\mathcal{E}(\gamma)) + \frac{1}{2}\mathrm{card}(\{(m_r, -m_{r'}) \times (m_s, -m_{s'}) \in \mathcal{E}(\gamma) : m_r = m_{s'},\ m_s = m_{r'}\})$$

et la cardinalité de l'ensemble des orbites de longueur un de $\mathcal{E}(\gamma)$ est égal à la dimension de la partie deployé du groupe de Cartan H (c'est à dire d_0), on peut, d'après le lemme **(5.2.1)**, conclure,

$$\begin{aligned} l_\theta(\gamma) = &= \frac{1}{2}\mathrm{card}(\{\alpha \in \Delta^+ : \theta_{\mathrm{car}}\alpha \notin \Delta^+\}) + \frac{1}{2}\dim(A_H) \\ &= l(\varphi_G). \end{aligned}$$

□

5.3 Le cas général

On commence avec la preuve du lemme **(5.1.1)**.

Preuve. Soit $\psi = \mathrm{St} \circ \psi_G \in \Psi_{\mathrm{AJ}}(\mathbf{G})$ et $\psi = \oplus_{i=1}^r \psi_i$ une decomposition de ψ en somme de paramètres élémentaires. Ainsi pour N on a une égalité $N = d_1 n_1 + \cdots + d_r n_r$, où $d_i,\ i \in [1, r]$ est égal à 2 sauf peut etre un seule $i \in [1, r]$ pour qui $d_i = 1$, de manière a ce que pout tout $i \in [1, r]$, ψ_i, définit un paramètre de Arthur de $GL(N_i),\ N_i = d_i n_i$, tel que Π_{ψ_i} est égal à, $\mathrm{Speh}(\delta_i, n_i)$, δ_i une série discrète de $GL(2, \mathbb{R})$ de caractère infinitésimal $(p_i/2, -p_i/2)$, si $d_i = 2$ et si $d_i = 1$, égal à un caractère quadratique de $GL(N_i, \mathbb{R})$ ou l'induite d'un caractère quadratique de $GL(N_i - 1, \mathbb{R})$ avec un caractère quadratique de $\mathbb{R}$.

Comme on a dit dans le cas d'un seul bloc associé à toute représentation dans $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi_G}$ on a un sous-groupe de Levi attaché à une algèbre parabolique θ_{car}-invariante. Dans le cas présent l'ensemble des sous-groupes de Levi à considérer est donné par les produits $\mathbf{L}_1^* \times \cdots \times \mathbf{L}_r^*$, où,

$$\mathbf{L}_i^* = \mathbf{U}(b_i, c_i),$$

avec $b_i + c_i = n_i$ si $d_i = 2$ et égal à,

$$\mathbf{L}_i^* = \begin{cases} \mathbf{SO}(b_i, c_i) & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SO}(p,q),\ p-q = 0,1,2, \\ \mathbf{SP}(n_i) & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{SP}(2n), \end{cases}$$

avec $b_i = p - \sum_{j \neq i} b_j$ et $c_i = \sum_{j \neq i} c_j$ si $d_i = 1$. Définissons finalement pour $i \in [i, r]$ avec $d_i = 2$,

$$\mathbf{L}_i = \begin{cases} \mathbf{U}(\frac{n_i}{2}, \frac{n_i}{2}) & \text{si } n_i \text{ est pair et } \mathbf{G}_i = \mathbf{SO}(n_i+1, n_i) \text{ ou } \mathbf{G}_i = \mathbf{SO}(n_i, n_i), \\ \mathbf{U}(\frac{n_i+1}{2}, \frac{n_i-1}{2}) & \text{si } n_i \text{ est impair et } \mathbf{G}_i = \mathbf{SO}(n_i+1, n_i) \text{ ou } \mathbf{G}_i = \mathbf{SO}(n_i+1, n_i-1) \end{cases}$$

et considérons le groupe de Levi $\mathbf{L}$ quasi-deployé de $\mathbf{G}$ isomorphe au produit $\mathbf{L}_1 \times \cdots \times \mathbf{L}_r$ où pour $i \in [1, r]$ avec $d_i = 1$, $\mathbf{L}_i = \mathbf{G}_i$. La représentation $\pi \in \Pi_{\psi_G}^{\mathrm{AJ}}(G)$ àssociée à $\mathbf{L}$ s'obtient par induction cohomologique à partir du caractère ξ de $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ défini par le produit,

$$\xi = \xi_1 \times \cdots \times \times \xi_r,$$

où ξ_i correspond à la représentation de $\mathbf{G}_i(\mathbb{R})$ définie dans **(5.6)** si $d_i = 1$ et au caractère de $\mathbf{L}_i(\mathbf{R})$ de différentiel,

$$(p_i'/2, \cdots, p_i'/2),$$

si $d_i = 2$. Comme dans le cas d'un seul bloc tout module standard qui intervient dans la resolution de π s'obtient, après induction cohomologique, d'un module standard dans la resolution de ξ. Décrire donc les modules standard dans la resolution de π revient comme dans le cas d'un seul bloc à décrire les modules standards dans la resolution de ξ.

Pour tout $i \in [1, r]$ avec $d_i = 2$ soit $\Phi_{\mathbf{L}_i}$ l'ensemble des L-paramètres de $\mathbf{L}_i$ définis par **(5.15)** à partir de toute permutation s_i de $[1, n_i]$ tel que $s_i^2 = \mathrm{Id}$. De la section précédent on sait que tout module standard stable qui intervient dans la resolution du caractère ξ_i pour $i \in [1, r]$ avec $d_i = 2$ est paramètré par un L-paramètre $\varphi_{L_i} \in \Phi_{\mathbf{L}_i}$. Dans le cas de $i \in [1, r]$ avec $d_i = 1$ les modules standard stables dans la resolution de ξ_i sont paramètrés par l'ensemble $\Phi_{\mathbf{L}_i}$ défini dans le paragraphe qui précède **(5.6)**, on rappelle que $\mathbf{L}_i = \mathbf{G}_i$. Choisissons pour chaque $i \in [1, r]$ un L-paramètre $\varphi_{L_i} \in \Phi_{\mathbf{L}_i}$, tout module standard dans le pseudo L-paquet attaché au L-paramètre de $\mathbf{L}$,

$$\varphi_L = \varphi_{L_1} \times \cdots \times \varphi_{L_r}, \tag{5.28}$$

est donné par un produit $\times_{i=1}^r X_i$ avec X_i un module standard dans le pseudo L-paquet $\Pi_{\varphi_{L_i}}$ attaché à φ_{L_i}. Définissons l'ensemble,

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\varphi_L = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_r,\ \varphi_i \in \Phi_{\mathbf{L}_i},\ i \in [1, r]\}.$$

Comme ξ est donné par un produit des caractères $\xi = \xi_1 \times \cdots \times \xi_t$, un module standard X de $\mathbf{L}$ intervient dans la résolution de ξ si et seulement si X est égal à un produit $\times_{i=1}^r X_i$ où pour chaque $i \in [1, r]$ le module standard X_i de $\mathbf{L}_i$ intervient dans la resolution de ξ_i. Par conséquent tout module standard stable qu'intervient dans la resolution de ξ est paramètre par un L-paramètre φ_L contenu dans $\Phi_{\mathbf{L}}$.

Soit φ_G le L-paramètre de $\mathbf{G}$ défini par la composition $\varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L$, tout module standard dans Π_{φ_L} tombe, après induction cohomologique, dans le pseudo paquet Π_{φ_G} attaché à φ_G. D'après le lemme **(8.8)** de **[AJ87]** tout élément dans Π_{φ_G} intervient dans la somme **(5.1)** et comme pour le cas d'un seul bloc on peut conclure que pour tout L-paramètre $\varphi_G \in \Phi_{\mathbf{G}}$ existe un unique L-paramètre $\varphi_L \in \Phi_{\mathbf{L}}$ de manière à ce que $\varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L$.

Considérons maintenant le groupe, $\mathbf{L}' = \times_{i=1}^{r} \mathbf{L}'_i$, où,

$$\mathbf{L}'_i(\mathbb{R}) := \begin{cases} GL(n_i, \mathbb{C}) & \text{si } d_i = 2, \\ GL(n_i, \mathbb{R}) & \text{si } d_i = 1. \end{cases}$$

Pour tout $i \in [1, r]$ soit $\Phi_{\mathbf{L}'_i}$ défini par **(5.25)** si $d_i = 2$ ou comme dans le paragraphe qui suit l'equation **(5.7)** si $d_i = 1$. Définissons l'ensemble,

$$\Phi_{\mathbf{L}'} := \{\varphi_{L'} = \oplus_{i=1}^{r} \varphi_{L'_i} : \varphi_i \in \Phi_{\mathbf{L}'_i}\}$$

et rappelons que l'ensemble de L-paramètres Φ de $GL(N)$ est défini par,

$$\Phi = \{\varphi = \oplus_{i=1}^{r} \varphi_i : \varphi_i \in \Phi_i\}.$$

où pour tout $i \in [1, r]$, Φ_i est défini dans le paragraphe qui précède **(5.8)** si $d_i = 2$ ou comme dans le paragraphe qui suit l'equation **(5.7)** si $d_i = 1$. D'après la section précédent, pour tout $i \in [1, r]$, l'application $\varphi_{L'_i} \mapsto \iota_i \circ \varphi_{L'_i}$ ($\iota_i :\ {}^L L'_i \to GL(N_i, \mathbb{C})$) nous donne une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}'_i}$ et Φ_i, par conséquent $\phi_{L'} \mapsto \iota \circ \phi_{L'}$ ($\iota :\ {}^L L' \to GL(N, \mathbb{C})$) définit une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}'}$ et Φ.

Fixons un L-paramètre $\varphi_L \in \Phi_{\mathbf{L}}$. Soit φ_G le L-paramètre de $\mathbf{G}$ défini par $\varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L$ et $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to GL(N, \mathbb{C})$ le L-paramètre de $GL(N)$ donné par la composition $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$. Pour tout $i \in [1, r]$ soit φ_{L_i} tel que $\varphi_L = \oplus_{i=1}^{r} \varphi_{L_i}$ et notons $\varphi_{L'_i} := \iota_{L'_i, L_i} \circ \varphi_{L_i}$, il est alors facile de voir que φ se décompose en une somme directe $\varphi = \oplus_{i=1}^{r} \varphi_i$, où $\varphi_i = \iota_i \circ \varphi_{L'_i}$. On a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} \varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L \arrow[r] & \mathrm{St} \circ \varphi_G = \varphi = \iota \circ \varphi_{L'} \\ \varphi_L = \oplus_{i=1}^{r} \varphi_{L_i} \arrow[u] \arrow[r] & \varphi_{L'} = \oplus_{i=1}^{r} \varphi_{L'_i} \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{5.29}$$

La flèche vertical de gauche nous donne une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}}$ et $\Phi_{\mathbf{G}}$. D'après la définition de $\Phi_{\mathbf{L}'_i}$, l'application $\varphi_{L_i} \mapsto \iota_{L'_i, L_i} \varphi_{L'_i}$ nous donne pour tout $i \in [1, r]$ une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}_i}$ et $\Phi_{\mathbf{L}'_i}$, la flèche horizontale dans bas du diagramme est en conséquence une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}}$ et $\Phi_{\mathbf{L}'}$ et comme $\varphi_{L'} \mapsto \iota \circ \varphi_{L'}$ définit une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}'}$ et Φ, la composition $\iota \circ \iota_{L',L}$ nous donne une bijection entre $\Phi_{\mathbf{L}}$ et Φ. Par conséquent l'application, $\varphi_G \mapsto \mathrm{St} \circ \varphi_G$, est une bijection entre $\Phi_{\mathbf{G}}$ et Φ. □

Donnons maintenant la preuve du lemme **(5.1.2)**.

Preuve. Pour tout L-morphisme φ_G dans $\Phi_{\mathbf{G}}$ soit $\varphi = \mathrm{St} \circ \varphi_G$. Pour chaque $i \in [1, r]$ choisissons $\varphi_{L_i} \in \Phi_{\mathbf{L}_i}$ de manière à ce que pour $\varphi_L = \oplus_{i=1}^{r} \phi_{L_i}$ on ait $\varphi_G = \iota_{G,L} \circ \varphi_L$. Notons $\varphi_{L'_i} := \iota_{L'_i, L_i} \circ \varphi_{L_i}, i \in [1, r]$, alors, $\varphi = \oplus_{i \in [1,r]} \varphi_i$, où pour tout $i \in [1, r]$, $\varphi_i := \iota_i \circ \varphi_{L'_i}$. On a comme objectif montrer l'égalité,

$$l_\theta(\varphi) = l(\varphi_G). \tag{5.30}$$

Rappelons que $l(\varphi_G) = l(\varphi_L)$ et que $l_\theta(\varphi)$ est défini par la somme,

$$l_\theta(\varphi) := \sum_{i=1}^{r} l_\theta(\varphi_i),$$

où $l_\theta(\varphi_i)$ se définit comme dans **(5.8)** si $d_1 = 2$ ou comme dans **(5.7)** si $d_i = 1$. D'après ce qui a été fait dans le cas d'un paramètre élémentaire, pour tout $\varphi_i, i \in [1, r]$ on a,

$$l_\theta(\varphi_i) = l(\varphi_{L_i}).$$

Montrer **(5.30)** se ramène donc à prouver l'égalité,

$$l(\varphi_L) = \sum_{i=1}^{r} l(\varphi_{L_i}).$$

Pour tout $i \in [1, r]$ notons par λ_i le caractère infinitésimal de φ_{L_i}. Pour $i \in [1, r]$ avec $d_i = 2$, λ_i est défini par l'equation **(5.26)**. Le caractère infinitésimal de tout module standard dans $\Pi_{\varphi_{\mathbf{L}}}$ est donné donc par,

$$\lambda = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_r.$$

Pour tout $i \in [1, r]$ soit H_i le groupe de Cartan θ_{car}-invariant de $\mathbf{L}_i(\mathbb{R})$ necessaire pour définir $l(\varphi_{L_i})$. Soit H isomorphe à $H = H_1 \times \cdots \times H_r$, et notons par Δ^+ le systeme de racines positives de $\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ défini par,

$$\Delta^+ := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) : \alpha(\lambda) > 0\}.$$

Pour la longueur de φ_L on a donc l'égalité

$$l(\varphi_L) = \frac{1}{2}\text{card}(\{\alpha \in \Delta^+ : \theta_{\text{car}}(\alpha) \notin \Delta^+\}) + \frac{1}{2}\dim(A_H).$$

Considérons maintenant le systeme de racines positives donné par,

$$\Delta_i^+ := \{\alpha_i \in \Delta(\mathfrak{l}_i, \mathfrak{h}_i) : \alpha_i(\lambda_i) > 0\},$$

Alors la longueur de chaque module standard contenu dans le pseudo-paquet associé à φ_{L_i} est donné par,

$$l(\varphi_{L_i}) = \frac{1}{2}\text{card}(\{\alpha \in \Delta_i^+ : \theta_{\text{car}}(\alpha) \notin \Delta^+\}) + \frac{1}{2}\dim(A_H).$$

L'isomorphisme,

$$\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_1 \times \cdots \times \mathbf{L}_r.$$

Nous donne pour $\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ l'égalité,

$$\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) = \bigcup_{i=1}^{r} \Delta(\mathfrak{l}_i, \mathfrak{h}_i).$$

Ce qui nous permet conclure l'identité,

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) : \alpha(\lambda) > 0\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \{\alpha_i \in \Delta(\mathfrak{l}_i, \mathfrak{h}_i) : \alpha_i(\lambda_i) > 0\}.\end{aligned}$$

D'où on obtient, car $\theta_{\mathrm{car}}(\Delta(\mathfrak{l}_{\mathfrak{i}}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{i}})) = \Delta(\mathfrak{l}_{\mathfrak{i}}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{i}})$ et $\dim(A_H) = \sum_{i=1}^{r} \dim(A_{H_i})$, l'égalité,

$$l(\varphi_L) := \sum_{i=1}^{r} l(\varphi_{L_i}).$$

$\square$

Annexe A

Lemme (4.2.5) et (4.2.8)

Lemme A.0.1. *Soient γ' et γ θ-invariants. Supposons que $\gamma' < \gamma$ et $l_\theta(\gamma) = l_\theta(\gamma') - 2$. Alors ils existent exactement deux ensemble θ-invariants, γ_1 et γ_2 tels que $\gamma < \gamma_j < \gamma'$, $j = 1, 2$. En plus on a l'égalité,*

$$\phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_1} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_1,\gamma} = \phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_2} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_2,\gamma}. \tag{A.1}$$

Preuve. Notons,

$$\gamma = \{\delta(m_k, -m_{k'}) : 1 \leq k \leq n\}.$$

Du lemme **(4.2.2)** pour tout ensemble θ-invariant γ' tel que $\gamma' < \gamma$ et $l_\theta(\gamma') = l_\theta(\gamma) - 2$ on a $l(\gamma') = l(\gamma) - i$, avec $i \in \{2, \cdots, 6\}$.

i.) Supposons $i = 2$. Soit γ_1 un ensemble θ-invariant tel que $\gamma' < \gamma_1 < \gamma$. Alors, $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 1$ et il existe dans γ un sous-ensemble d_1 avec les propriétés énoncées dans **(4.2.1)**. Comme γ_1 est θ-invariant, l'ensemble d_1 l'en est aussi, par conséquent, il est constitué par une paire de séries discrètes de la forme, $\delta(m_{j_1}, -m_{j_1'}),\ \delta(m_{j_1'}, -m_{j_1}),\ m_{j_1} > m_{j_1'}$. Pour γ_1 on a donc l'égalité,

$$\gamma_1 = (\gamma \setminus d_1) \cup c_1,$$

où c_1 est donné par, $c_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}),\ \delta(m_{j_1'}, -m_{j_1'})\}$. Le même processus est nécessaire d'être suivi pour aller de γ_1 à γ', c'est-à-dire, il existe dans γ_1 un sous-ensemble d_2, avec les propriétés énoncés dans **(4.2.1)**, de façon à ce qu'on puisse écrire,

$$\gamma' = \gamma_1 \setminus d_2 \cup c_2,$$

où $c_2 < d_2$. Comme γ_1 et γ' sont θ-invariants, l'ensemble d_2 l'en est aussi, d'oú, $d_2 = \{\delta(m_{j_2}, -m_{j_2'}),\ \delta(m_{j_2'}, -m_{j_2})\}, m_{j_2} > m_{j_2'}$, respectivement $c_2 = \{\delta(m_{j_2}, -m_{j_2}),\ \delta(m_{j_2'}, -m_{j_2'})\}$. Par conséquent $d_2 \cap c_1 = \emptyset$ et pour γ' on a l'égalité,

$$\gamma' = [\gamma \setminus (d_1 \cup d_2)] \cup (c_1 \cup c_2).$$

Du lemme **(4.2.3)** γ_1 et γ_2, où γ_2 est définit par $\gamma_2 := (\gamma \setminus d_2) \cap c_2$, sont les seules ensembles θ-invariants tels que $\gamma' < \gamma_j < \gamma,\ j = 1, 2$. Ce qui nous permet de conclure qu'entre γ et γ' on a deux chemins possibles, comme en plus le morphisme **(4.16)** est proportionnel au morphisme de Johnson on sait grâce à la suite construit par J. Johnson que $\phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_1} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_1,\gamma'}$ et $\phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_2} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_2,\gamma'}$ sont proportionnels, donc egaux car ils satisfont l'égalité **(4.17)**.

ii.) Supposons $i = 3$. Soit γ_1 un ensemble θ-invariant tel que $\gamma' < \gamma_1 < \gamma$. Pour la longueur de γ_1 on a les posibilités suivants, $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 1$ ou $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 2$. Supposons d'abord $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 1$. Comme pour le point précédent, dans γ il existe un sous-ensemble d_1 constitué par, $d_1 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i'_1}),\ \delta(m_{i'_1}, -m_{i_1})\},\ m_{i_1} > m_{i'_1}$, de manière à ce qu'on ait l'égalité,

$$\gamma_1 = (\gamma \setminus d_1) \cup c_1,$$

où c_1 est donné par, $c_1 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}),\ \delta(m_{i'_1}, -m_{i'_1})\}$. Comme $l(\gamma') = l(\gamma_1) - 2$ et γ_1 ainsi que γ', sont θ-invariants, du lemme **(4.2.3)** on sait qu'il existe dans γ_1 un sous-ensemble θ-invariant d_2 de cardinalité trois ou quatre de façon à ce qu'on puisse écrire $\gamma' = (\gamma_1 \setminus d_2) \cup c_2$ où $c_2 < d_2$ et $l(c_2) = l(d_2) - 2$. Si $d_2 \cap c_1 = \emptyset$, d_2 est un sous-ensemble de γ et on peut écrire,

$$\gamma' := [\gamma \setminus (d_1 \cup d_2)] \cup (c_1 \cup c_2),$$

d'où il est facile de voir que γ_1 et γ_2, avec γ_2 définit par $\gamma_2 := (\gamma \setminus d_2) \cap c_2$, sont les seules ensembles θ-invariants tels que $\gamma' < \gamma_j < \gamma,\ j = 1, 2$. Considérons maintenant le cas oû $d_2 \cap c_1 \neq \emptyset$. Supposons $d_2 \cap c_1 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1})\}$. Comme d_2 est $\theta-$invariant et $l(\gamma') = l(\gamma_1) - 2$, dans γ il existe une paire de séries discrètes, $\delta(m_{j_1}, -m_{j_2})$, $\delta(m_{j_2}, -m_{j_1})$, de manière à ce que $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{j_2}$ et d_2 puisse être écrit par,

$$d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}.$$

Notons $d := d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$ et $c = (c_1 \setminus d_2) \cup c_2$, alors, $\gamma' = [\gamma \setminus d] \cup c$ et pour tout ensemble γ'' avec $\gamma' < \gamma'' < \gamma$, existe $d'' < d$ tel que $\gamma'' = (\gamma \setminus d'') \cup c''$ où $c < c'' < d''$. Pour la deuxiene séries discrète que constitue d_1 on a $m_{i_2} < m_{j_2}$ ou $m_{j_2} > m_{i_2}$, d'où pour d on a une de deux posibilités suivants,

$$\begin{aligned} d^1 &:= \{\delta(m_{i_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\}, \\ d^2 &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\}. \end{aligned}$$

Les deux possibilités pour d, nous donnent respectivement pour c, les posibilités suivants,

$$\begin{aligned} c^1 &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\}, \\ c^2 &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}, \\ c^{2,*} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_4})\} \end{aligned}$$

On ne considérera pas le cas $c^{2,*}$ car il est equivalent au cas c^2. Par conséquent, le problème de trouver tout ensemble θ-invariant entre γ et γ' se ramène à trouver dans $GL(8, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et c. Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et c est donné par une des deux posibilités suivants,

$$\begin{aligned} d_1^1 &= \{\delta(m_{i_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\}, \\ d_2^1 &= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\}, \end{aligned}$$

respectivement,

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\}, \\ d_2^2 &= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}. \end{aligned}$$

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)**. Notons, $\gamma_i^j := (\gamma \setminus d^j) \cup d_i^j,\ i, j = 1, 2$. Considérons le paire $\gamma_i^{j,+} := (\gamma \setminus d^j) \cup d_i^{j,+},\ \gamma_i^{j,-} := (\gamma \setminus d^j) \cup d_i^{j,-},\ i, j = 1, 2$ où le quadruplet $d_1^{i,+},\ d_1^{i,-},\ d_2^{i,+},\ d_2^{i,-}$ est donné par,

$$
\begin{aligned}
d_1^{1,+} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
d_1^{1,-} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\},\\
d_2^{1,+} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
d_2^{1,-} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\}.
\end{aligned}
$$

si $i = 1$ ou par,

$$
\begin{aligned}
d_1^{1,+} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\},\\
d_1^{1,-} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},\\
d_2^{1,+} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\},\\
d_2^{1,-} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.
\end{aligned}
$$

si $i = 2$. On a le diagramme suivant,

$$
\begin{tikzcd}
& I(\gamma) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
I(\gamma_1) \arrow[d] \arrow[dr] & I(\gamma_2^+) \arrow[dl] \arrow[dr] & I(\gamma_2^-) \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\gamma_1^+) \arrow[dr] & I(\gamma_1^-) \arrow[d] & I(\gamma_2) \arrow[dl] \\
& I(\gamma') &
\end{tikzcd}
$$

où on a note une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. Comme le morphisme **(4.16)** est proportionnel au morphisme de Johnson on peut conclure grâce au lemme **(4.2.3)** et à la suite construit par J. Johnson que tout chemin entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$ est proportionnels, donc égaux, car chaque morphisme intermediaire satisfait l'égalité **(4.17)**. Par conséquent on obtient l'égalité,

$$\phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_1} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_1,\gamma} = \phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_2} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_2,\gamma}.$$

On a suppose qu'il existe un ensemble θ-invariant, γ_1, de longueur $l(\gamma) - 1$ tel que $\gamma' < \gamma_1 < \gamma$. Supposons que un tel ensemble n'existe pas. Un processus similaire à celle que on a fait plus hâut nous permet de ramèner le problàme à celle de trouver dans $GL(8, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et c quand entre d et c il n'existe pas un ensemble θ-invariant de longueur $l(d) - 1$. Mais pour avoir dans $GL(8, \mathbb{R})$ une paire d et c avec les propriétés que viennent d'être mentionnée, il faut que d soit donné par une des deux possibilités suivants,

$$
\begin{aligned}
d^a &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4})), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\},\\
d^b &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2})), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_4})\},
\end{aligned}
$$

et c par,

$$c := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2})), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_4})\}.$$

On ne considérera pas le cas d^b, car il est equivalent au cas d^a. Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d^a et c, est donné par,

$$\begin{aligned} d_1 &= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2})), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}, \\ d_2 &= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3})), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_4})\}. \end{aligned}$$

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)**. Notons, $\gamma_j := (\gamma \setminus d^a) \cup d_j,\ j = 1, 2$. Considérons le paire $\gamma^+ := (\gamma \setminus d^a) \cup d^+,\ \gamma^- := (\gamma \setminus d^a) \cup d^-$ où le paire $d^+,\ d^-$ est donné par,

$$\begin{aligned} d+ &= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\}, \\ d^- &= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}. \end{aligned}$$

Dans le diagramme suivant on note une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. On a,

$$\begin{tikzcd} & I(\gamma) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ I(\gamma^+) \arrow[d] \arrow[drr] & & I(\gamma^-) \arrow[d] \arrow[dll] \\ I(\gamma_1) \arrow[dr] & & I(\gamma_2) \arrow[dl] \\ & I(\gamma') & \end{tikzcd}$$

Le même argument utilisé plus haut nous permet en regardant le diagramme conclure que tout chemin entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$ donne le même morphisme, d'où on obtient l'égalité **(A.1)**.

Avant de commencer avec le cas $i = 4$ on aura besoin de la notation suivant ;

Notation Soit α et α' une paire θ-invariant tel que $\alpha' < \alpha$ et $l(\alpha) = l(\alpha') + 2$. De la preuve du lemme **(4.2.3)** on sait qu'il existe dans α un sous-ensemble θ-invariant a de cardinalité trois ou quatre de façon à ce qu'on puisse écrire $\alpha' = (\alpha \setminus a) \cup b$ où $b < a$ et $l(b) = l(a) - 2$. Les deux ensembles définis dans le lemme **(4.2.3)** seront, dans tout la suite, notés par, $\tau^+_{\alpha',\alpha}$ et $\tau^-_{\alpha',\alpha}$ où $\tau^+_{\alpha',\alpha}$ est l'ensemble qui s'obtient apres avoir fait une permutation sur le sous-ensemble de cardinalité deux de a, qui contient la série discrète de caractère infinitésimal $(m_k, -m_{k'})$ avec m_k maximal dans a, c'est-à-dire, tel que pour tout série discréte $\delta(m_j, -m_j) \in a$, $m_j \leq m_k$.

iii.) Supposons $i = 4$. Soit γ_1 un ensemble θ-invariant tel que $\gamma' < \gamma_1 < \gamma$. Pour la longueur de γ_1 on a les posibilités suivants $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 1$ ou $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 2$ ou $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 3$. Supposons d'abord $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 2$. Du lemme **(4.2.3)** on sait qu'il existe dans γ un sous-ensemble θ-invariant d_1 de cardinalité trois ou quatre de façon à ce qu'on puisse écrire $\gamma_1 = (\gamma \setminus d_1) \cup c_1$ où $c_1 < d_1$ et $l(c_1) = l(d_1) - 2$. Comme $l(\gamma') = l(\gamma_1) - 2$, γ' s'obtient de manière analogue, mais cette fois-ci, à partir de γ_1, c'est-à-dire il existe dans γ_1 un sous-ensemble θ-invariant d_2 de cardinalité trois ou quatre de façon à ce qu'on puisse écrire $\gamma_1 = (\gamma \setminus d_2) \cup c_2$ où $c_2 < d_2$ et $l(c_2) = l(d_2) - 2$. Si $d_2 \cap c_1 = \emptyset$, il est facile de voir que γ_1 et γ_2, où γ_2 est définit par,

$$\gamma_2 := \gamma \setminus d_2 \cap c_2,$$

sont les seuls ensembles θ-invariants tels que, $\gamma' < \gamma_i < \gamma$, $i = 1, 2$. On suppose donc $c_1 \cap d_2 \neq \emptyset$. Supposons aussi que d_2 est constitué par les trois séries discrètes suivants,

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1})\},$$

où $m_{i_1} > m_{i_2} > m_{i_3}$. Si d_1 définit un sous-ensemble θ-invariant de cardinalité quatre, on a pour d_1 deux possibilités,

i.)

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

$m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$, d'où c_1 est oblige à s'écrire par,

$$c_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

ii.)

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

$m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$, d'où c_1 est oblige à s'écrire par,

$$c_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

Si d_1 définit un sous-ensemble θ-invariant de cardinalité trois, pour d_1 on a l'égalité suivant,

iii.)

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\},$$

$m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3}$, d'où pour c_1 on a au moins une des deux posibilités suivants,

$$c_1^1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\},$$
$$c_1^2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2})\}.$$

Comme les deux posibilités sont symétriques on considérera uniquement c_1^1.

Considérons d'abord le cas où d_1 s'écrit comme dans **i.)**. Pour $c_1 \cap d_2$ on a deux possibilités, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a l'égalité $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$. Par conséquent si on note, $d = d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$, les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées de la manière suivant,

$$d := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_3}$.
Le problème de trouver tout ensemble θ-invariant entre γ et γ' se ramène donc au problème

de trouver dans $GL(10,\mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,
a.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

b.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

Si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$. Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des options suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}$$

et,

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **a.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **b.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **a.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_2})\},$$

si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **b.)**.

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Notons, $\gamma_i := (\gamma \backslash d) \cup d_i$, $i = 1, 2$. Considérons d'abord le cas où $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 2 = l(\gamma)$, alors il existe une famillie $\{\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{1,2}, \gamma'_+, \gamma'_-\}$ de façon à ce qu'on puisse écrire le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & I(\gamma) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
I(\gamma_+) \arrow[d] \arrow[dr] & & I(\gamma_-) \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\gamma_1) \arrow[d] & I(\gamma_{1,2}) \arrow[dl] \arrow[dr] & I(\gamma_2) \arrow[d] \\
I(\gamma'_+) \arrow[dr] & & I(\gamma'_-) \arrow[dl] \\
 & I(\gamma') &
\end{tikzcd} \tag{A.2}$$

où on a note une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. Si $l(\gamma_1) + 1 = l(\gamma_2) + 2 = l(\gamma)$, on peut choisir un chemin $\gamma > \tau > \gamma_1$ entre γ et γ_1, un chemin $\gamma_1 > \tau' > \gamma$ entre γ_1 et γ', ainsi qu'un chemin $\gamma_2 > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \tau^2_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$ entre γ_2 et γ' de manière à ce qu'il existe une famillie $\{\gamma^i_{(1,2)}\}_{i=1}^4$ de façon à ce qu'on puisse écrire le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & & I(\gamma) \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
I(\tau) \arrow[d] \arrow[dr] & & I(\gamma^1_{(1,2)}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & I(\gamma_2) \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\gamma_1) \arrow[d] & I(\gamma^2_{(1,2)}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & I(\gamma^3_{(1,2)}) \arrow[dl] \arrow[dr] & I(\tau^1_{\gamma',\gamma_2}) \arrow[d] \\
I(\tau') \arrow[drr] & & I(\gamma^4_{(1,2)}) \arrow[d] & & I(\tau^2_{\gamma',\gamma_2}) \arrow[dll] \\
 & & I(\gamma') & &
\end{tikzcd} \tag{A.3}$$

où on a note une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. Supposons que les deux affirmations ci-dessus ont été prouvées, comme le morphisme **(4.16)** est proportionnel au morphisme de Johnson on peut conclure grâce au lemme **(4.2.3)** et à la suite construit par J. Johnson que tout chemin entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$ est proportionnels, donc égaux, car chaque morphisme intermediaire satisfait l'égalité **(4.17)**. Par conséquent on obtient l'égalité,

$$\phi^\omega_{\gamma',\gamma_1} \circ \phi^\omega_{\gamma_1,\gamma} = \phi^\omega_{\gamma',\gamma_2} \circ \phi^\omega_{\gamma_2,\gamma}.$$

Il ne nous reste qu'à prouver la véracité des deux diagrammes ci-dessus. On le fait cas par cas.

Si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **a.** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$. Pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\}.$$

Si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **b.)** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$ et pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre le même ensemble que dans le cas précédent.

Si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **a.)** on a $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 1 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1 respectivement γ_1 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_1 > \tau^+_{\gamma',\gamma_1} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_2 et γ' le chemin suivant,

$$\gamma_2 > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \tau^2_{\gamma',\gamma_2} > \gamma',$$

avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_2} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_2}$, $j = 1, 2$ où,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\}, \\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4} - m_{j_2})\}.
\end{aligned}$$

Alors pour prouver **(A.3)** il suffit de prendre l'ensemble $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^4$ de la façon suivant ; on définit $\gamma_{1,2}^i$ par $\gamma_{1,2}^i := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}^i$ où,

$$\begin{aligned}
d_{1,2}^1 &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\} \\
d_{1,2}^2 &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\} \\
d_{1,2}^3 &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\} \\
d_{1,2}^4 &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\}.
\end{aligned}$$

Si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **b.** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$ et pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre le même ensemble que dans le première cas.

Supposons en suite que d_1 est donné par **ii.)**. Pour $c_1 \cap d_2$ on a deux posibilités $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a l'égalité, $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}),\ \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$, d'où les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées de la manière suivant,

$$d := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

où $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$. On a par conséquent réduit le problème à celle de trouver dans $GL(10, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,

a.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

b.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des possibilités suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

et

$$d_2^a := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

Si d' est donné par **a.)**.

$$d_2^b := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

Si d' est donné par **b.)**.

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Pour cela il suffit de montrer, dans le cas présent, la véracité du diagramme **A.2** ou **(A.3)**. On le fait cas par cas.

Si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **a.** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$. Pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^-_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4} - m_{j_3})\}$$

Si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et d' est donné par **b.** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$. Pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où $d_{1,2}$ est définit comme dans le cas précédent.

Considérons maintenant le cas où d_1 est donne par **iii.)** On a donc pour $c_1 \cap d_2$ deux possibilités $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \delta(m_{j_3}, -m_{j_3})$. Prenons d'abord $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a l'égalité, $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$, d'où les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées de la manière suivant,

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\},$$

où $m_{i_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{i_3}$. On a réduit le problème à celle de trouver dans $GL(8, \mathbb{R})$, tout ensemble θ-invariant entre d et,
a.

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\}.$$

b.

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\}.$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des possibilités suivants,

$$d_1 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\},$$

et

$$d_2^a := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2})\},$$

si d' est donne par **a.)**.

$$d_2^b := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_2})\},$$

si d' est donne par **b.)**.

On suppose finalement $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\}$. Pour d_2 on a l'égalité, $d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1})\}$, d'où les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées à de la manière suivant,

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3}$ et $m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_3}$. Une fois de plus on est capables de rd́uire le problème à celle de trouver dans $GL(10, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,
a.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3})\}$$

b.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3})\}$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des possibilités suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1})\},$$

et,

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3})\},$$

si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **a.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3})\},$$

si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **b.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3})\},$$

si $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **a.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_2})\},$$

si $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **b.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1})\},$$

si $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **a.)**.

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Pour cela il suffit de montrer, dans le cas présent, la véracité du diagramme **(A.2)** ou **(A.3)**. On le fait cas par cas.

Si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **a.** on a $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 1 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement γ_1 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_1 > \tau^+_{\gamma',\gamma_1} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_2 et γ' le chemin suivant,

$$\gamma_2 > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \tau^2_{\gamma',\gamma_2} > \gamma',$$

avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_2} = (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_2},\ j = 1, 2$ où,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3} - m_{i_3})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3} - m_{i_3})\}.
\end{aligned}$$

Alors pour prouver **(A.3)** il suffit de prendre l'ensemble $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^4$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^i_{1,2}$ par $\gamma^i_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^i_{1,2}$ où,

$$\begin{aligned}
d^1_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3} - m_{i_1})\}\\
d^2_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3} - m_{i_3})\}\\
d^3_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3} - m_{i_1})\}\\
d^4_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3} - m_{i_3})\}.
\end{aligned}$$

Si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **b.** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$. Pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^-_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3} - m_{j_3})\}.$$

Si $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **a.** ou **b.** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$. Pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3} - m_{i_1})\}.$$

Si $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3}$ et d' est donné par **a.** on a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$. Pour prouver **(A.2)** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3} - m_{i_1})\}.$$

Si maintenant on suppose que d_2 définit un ensemble de cardinalité quatre, pour d_2 on a deux posibilités,
i.)

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$

$m_{i_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{i_4}$.
ii.)

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\},$$

$m_{i_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{i_4}$.

Considérons d'abord le cas où d_2 est donné par **1.)**. Si d_1 est donné par **i.)** alors pour $c_1 \cap d_2$ on a deux possibilités $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a deux posibilités $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$ ou $d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\}$. Par conséquent, les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées par une des options suivants,
a.)

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$, $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{j_3}$ et le quadruplet $\{m_{j_2}, m_{i_2}, m_{j_3}, m_{i_3}\}$ ne satisfait pas $m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3}$.
b.)

$$d = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_3} > m_{i_4}$. On peut donc réduire le problème à celle de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,
a.

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

b.)

$$d' = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des possibilités suivants,
a.)

$$d_1 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

et,

$$d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_2})\},$$

si d est donné par **a.)** et on n'a pas l'inégalité, $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{i_3} > m_{j_3} > m_{j_4}$.

$$d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

si d est donné par **a.)** et $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{i_3} > m_{j_3} > m_{j_4}$.
b.)

$$d_1 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

et,

$$d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

si d est donné par **b.)** et $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_4} > m_{j_4}$.

$$d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_1})\},$$

si d est donné par **b.)** et $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4} > m_{i_4}$.
On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Pour cela il suffit de montrer, dans le cas présent, la véracité du diagramme **(A.2)**. On le fait cas par cas.

Si d est donné par **a.** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où, ,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3} - m_{j_2}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\}.$$

Si d est donné par **b.** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où, ,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_4} - m_{i_1}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\}.$$

Supposons maintenant que d_1 est donné par **ii.)**, pour $c_1 \cap d_2$ on a deux possibilités $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a deux posibilités $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ ou $d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\}$. Par conséquent, les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées par une des options suivants,
a.)

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

où $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$.
b.)

$$d = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_4}$. On peut donc réduire le problème à celle de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,
a.

$$d' = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

b.

$$d' = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des possibilités suivants,
a.)

$$d_1 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

et

$$d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

b.)

$$d_1 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

et,

$$d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_4})\},$$

si, $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_4} > m_{j_3} > m_{j_4}$.

$$d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

si, $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_4} > m_{j_4}$.

$$d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_1})\},$$

si, $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4} > m_{i_4}$.

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Pour cela il suffit de montrer, dans le cas présent, la véracité du diagramme **(A.2)**. On le fait cas par cas.

Si d est donné par **a.** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3} - m_{j_1}), \delta(m_{j_4} - m_{j_3})\}$$

Si d est donné par **b.** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3} - m_{j_1}), \delta(m_{j_4} - m_{j_3})\}$$

Considérons maintenant le cas où d_2 est donné par **2.)**. Si d_1 est donné par **i.)**, pour $c_1 \cap d_2$ on a deux possibilités $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}),\ \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 =$

$\{\delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a deux posibilités $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2})\}$ ou $d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$. Par conséquent, les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées par une des options suivants,
a.)

$$d := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{j_3} > m_{j_4}, m_{i_4}$.
b.)

$$d := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\}$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{i_3} > m_{j_3}$. On peut donc ramèner le problème à celle de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,
a.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

b.)

$$d' := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des possibilités suivants,
a.)

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

et

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

b.)

$$d_1 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}$$

et,

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_3})\}$$

si, $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{i_3} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$.

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\}$$

si, $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_3} > m_{j_3} > m_{j_4}$.

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Pour cela il suffit de montrer, dans le cas present, la véracité du diagramme **(A.2)**. On le fait cas par cas.

Si d est donné par **a.** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_4} - m_{j_3}), \delta(m_{j_4} - m_{j_1})\}.$$

Si d est donné par **b.** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3} - m_{j_2}), \delta(m_{j_4} - m_{i_3})\}.$$

Supposons maintenant que d_1 est donné par **ii.)**, pour $c_1 \cap d_2$ on a deux possibilités $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a deux posibilités $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4})\}$ ou $d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$. Par conséquent, les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées par une des options suivants,
a.)

$$d := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

où $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{i_3} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$.
b.)

$$d := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$, $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_4}$. On peut donc ramèner le problème à celle de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,
a.)

$$d' := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

b.)

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des possibilités suivants,
a.)

$$d_1 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

et

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

b.)

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

et,

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

si, $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_4} > m_{j_4}$.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\},$$

si, $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4} > m_{i_4}$.

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Pour cela il suffit de montrer, dans le cas présent, la véracité du diagramme **(A.2)**. On le fait cas par cas.

Si d est donné par **a.** il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3} - m_{i_3}), \delta(m_{j_4} - m_{j_3})\}$$

Si d est donné par **b.** et $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_4} > m_{j_4}$ il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^+_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^-_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où,

$$d_{1,2} = \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4} - m_{j_2}), \delta(m_{j_4} - m_{j_3})\}$$

Si d est donné par **b.** et $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4} > m_{i_4}$ il suffit de prendre l'ensemble suivant, $\{\gamma_+ := \tau^+_{\gamma_1,\gamma}, \gamma_- := \tau^-_{\gamma_2,\gamma}, \gamma_{1,2}, \gamma'_+ := \tau^+_{\gamma',\gamma_1}, \gamma'_- = \tau^+_{\gamma',\gamma_2}\}$ avec $\gamma_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}$ où $d_{1,2}$ est défini comme dans le cas précrédent.

iv.) Supposons $i = 5$. Soit γ_1 un ensemble θ-invariant tel que $\gamma' < \gamma_1 < \gamma$. Pour la longueur de γ_1 on a les posibilités suivants $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 2$ ou $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 3$. Supposons d'abord $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 2$. Du lemme **(4.2.3)** on sait qu'il existe dans γ un sous-ensemble θ-invariant d_1 de cardinalité trois ou quatre de façon à ce qu'on puisse écrire $\gamma_1 = (\gamma \setminus d_1) \cup c_1$ où $c_1 < d_1$ et $l(c_1) = l(d_1) - 2$. Comme $l(\gamma') = l(\gamma_1) - 3$, du lemme **(4.2.4)** on sait qu'il existe dans γ_1 un sous-ensemble d_2 donné par,

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$

$m_{i_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{i_4}$, de manière à ce que γ_2 puisse être écrit par, $\gamma_2 = \gamma_1 \setminus d_2 \cup c_2$, où c_2 est définit par,

$$c_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.$$

Si $d_2 \cap c_1 = \emptyset$, il est facile de voir que γ_1 et γ_2, où γ_2 est définit par,

$$\gamma_2 := \gamma \setminus d_2 \cap c_2,$$

sont les seuls ensembles θ-invariants tels que, $\gamma' < \gamma_i < \gamma$, $i = 1, 2$. On suppose donc $d_2 \cap c_1 \neq \emptyset$. Supposons en plus que d_1 est constitué par les trois séries discrètes suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3}$ et que c_1 est donné par,

$$c_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\}.$$

Le cas où c_1 est donné par, $\{\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2})\}$, se fait de manière analogue, par conséquent, on ne le consideérera pas. On a pour $c_1 \cap d_2$ deux possibilités, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$. Supposons $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\}$. Pour d_2 on a deux posibilités $d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\}$ ou $d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\}$. Par conséquent si on note, $d = d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$, les séries discrètes qui constituent d doivent être distribuées par une des options suivants,
a.)

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3}$ et $m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_2} > m_{i_3}$.
b.)

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3}$.
Le problème de trouver tout ensemble θ-invariant entre γ et γ' se ramène donc au problème de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},$$

si d est donné par **a.)**.

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_3})\}.$$

si d est donné par **b.)**. Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des posibilités suivants,
a.

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$

et,

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.$$

si, $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3} > m_{i_4}$ et d est donné par **a.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},$$

si, $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_3} > m_{i_4}$ et d est donné par **a.)**.

$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_1})\}.$$

si, $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3} > m_{i_4}$ et d est donné par **a.)**.
b.

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$
$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\}.$$

si d est donné par **b.)**.

Passons maintenant au cas où $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a l'égalité $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ d'où les séries discrètes qui constituent $d = d_1 \cup (d_2 \setminus c_1)$ doivent être distribuées de la manière suivant,

$$d := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, m_{j_1})\}.$$

Le problème de trouver tout ensemble θ-invariant entre γ et γ' se ramène donc au problème de trouver dans $GL(10, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, m_{j_3})\}.$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et c est donné par une des posibilités suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, m_{j_3})\},$$
$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, m_{i_3})\}.$$

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Notons, $\gamma_i := (\gamma \backslash d) \cup d_i$, $i = 1, 2$. Considérons d'abord le cas où $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma) - 2$. Alors, on peut choisir un chemin $\gamma > \tau > \gamma_1$ entre γ et γ_1, respectivement $\gamma_2 > \tau' > \gamma'$ entre γ_2 et γ', ainsi qu'un chemin $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma'$ entre γ_1 et γ', respectivement $\gamma > \tau^1_{\gamma_2,\gamma} > \tau^2_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$ entre γ et γ_2, de manière à ce qu'il existe une paire $\{\gamma^1_{(1,2)}, \gamma^2_{(1,2)}\}$ de façon à ce qu'on puisse écrire le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & I(\gamma) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
I(\tau) \arrow[d] \arrow[dr] & & I(\tau^1_{\gamma_2,\gamma}) \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\gamma_1) \arrow[d] & I(\gamma_{1,2}) \arrow[dl] \arrow[d] & I(\tau^2_{\gamma_2,\gamma}) \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\tau^1_{\gamma',\gamma_1}) \arrow[d] & I(\gamma_{1,2}) \arrow[dl] \arrow[dr] & I(\gamma_2) \arrow[d] \\
I(\tau^2_{\gamma',\gamma_1}) \arrow[dr] & & I(\tau') \arrow[dl] \\
 & I(\gamma') &
\end{tikzcd} \tag{A.4}$$

où on a note une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. Si $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 2 = l(\gamma)$, on peut choisir un chemin $\gamma > \gamma_+ > \gamma_1$ entre γ et γ_1, respectivement $\gamma > \gamma_- > \gamma$ entre γ et γ_2, ainsi qu'un chemin $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma'$ entre γ_1 et γ', respectivement $\gamma_2 > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \tau^2_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$ entre γ_1 et γ', de manière à ce qu'il existe une famillie $\{\gamma^i_{(1,2)}\}_{i=1}^4$ de façon à ce qu'on puisse écrire le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & & I(\gamma) \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
I(\gamma_+) \arrow[d] \arrow[drr] & & & & I(\gamma_-) \arrow[dll] \arrow[d] \\
I(\gamma_1) \arrow[d] \arrow[dr] & & I(\gamma^1_{1,2}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & I(\gamma_2) \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\tau^1_{\gamma',\gamma_1}) \arrow[d] & I(\gamma^2_{1,2}) \arrow[dl] & I(\gamma^3_{1,2}) \arrow[dll] \arrow[drr] & I(\gamma^3_{1,2}) \arrow[dr] & I(\tau^1_{\gamma',\gamma_2}) \arrow[d] \\
I(\tau^2_{\gamma',\gamma_1}) \arrow[drr] & & & & I(\tau^2_{\gamma',\gamma_2}) \arrow[dll] \\
 & & I(\gamma') & &
\end{tikzcd} \tag{A.5}$$

où on a note une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. Supposons que les deux affirmations ci-dessus ont été prouvées, comme le morphisme **(4.16)** est proportionnel au morphisme de Johnson on peut conclure grâce au lemme **(4.2.3)** et à la suite construit par J. Johnson que tout chemin entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$ est proportionnels, donc égaux, car chaque morphisme intermediaire satisfait l'égalité **(4.17)**. Par conséquent on obtient l'égalité,

$$\phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_1} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_1,\gamma} = \phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_2} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_2,\gamma}.$$

Il ne nous reste qu'à prouver la véracité des deux diagrammes ci-dessus. On le fait cas par cas.

On commence par le cas où $c_1 \cap d_2$ est donné par $\{\delta(m_{j_3}, -m_{j_3})\}$.
Si $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3} > m_{i_4}$ et d est donné par **a.)** on a $l(\gamma_1)+2 = l(\gamma_2)+3 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ_2 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^{+}_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_2 > \tau^{+}_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ et γ_2, le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^{1}_{\gamma',\gamma_1} > \tau^{2}_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma > \tau^{1}_{\gamma_2,\gamma} > \tau^{2}_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$, avec $\tau^{j}_{\gamma',\gamma_1}$ $j=1,2$, respectivement $\tau^{j}_{\gamma_2,\gamma}$ $j=1,2$ défini par $\tau^{j}_{\gamma',\gamma_1} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^{j}_{\gamma',\gamma_1}$, respectivement $\tau^{j}_{\gamma_2,\gamma} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^{j}_{\gamma_2,\gamma}$, où,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^{1}_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
\bar{\tau}^{2}_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},\\
\bar{\tau}^{1}_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
\bar{\tau}^{2}_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.
\end{aligned}$$

Alors pour prouver **(A.4)** il suffit de prendre le paire $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^{2}$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^{i}_{1,2}$ par $\gamma^{i}_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^{i}_{1,2}$ où,

$$\begin{aligned}
d^{1}_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
d^{2}_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.
\end{aligned}$$

Si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_1} > m_{j_3} > m_{i_3} > m_{i_4}$ et d est donné par **a.)** on a $l(\gamma_1)+2 = l(\gamma_2)+2 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ et γ_2, le chemin, $\gamma > \tau^{+}_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma > \tau^{+}_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ_2 et γ', le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^{1}_{\gamma',\gamma_1} > \tau^{2}_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma_2 > \tau^{1}_{\gamma',\gamma_2} > \tau^{2}_{\gamma',\gamma_2} > \gamma_2$, avec $\tau^{j}_{\gamma',\gamma_i}$ $i,j=1,2$, défini par $\tau^{j}_{\gamma',\gamma_i} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^{j}_{\gamma',\gamma_1}$, où

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^{1}_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
\bar{\tau}^{2}_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
\bar{\tau}^{1}_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},\\
\bar{\tau}^{2}_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.
\end{aligned}$$

Alors pour prouver **(A.5)** il suffit de prendre la famillie $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^{4}$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^{i}_{1,2}$ par $\gamma^{i}_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^{i}_{1,2}$ où,

$$\begin{aligned}
d^{1}_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
d^{2}_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
d^{3}_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
d^{4}_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.
\end{aligned}$$

Si $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{i_3} > m_{i_4}$ et d est donné par **a.)** on a $l(\gamma_1)+2 = l(\gamma_2)+3 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ et γ_2, le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma > \tau^+_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ_2 et γ', le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma_2 > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \tau^2_{\gamma',\gamma_2} > \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_i}$ $i,j = 1,2$, défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_i} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_1}$, où

$$\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{i_1},-m_{i_4}),\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{j_2},-m_{j_1}),\delta(m_{j_3},-m_{j_3}),\delta(m_{i_3},-m_{i_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_3})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{i_1},-m_{j_3}),\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{j_2},-m_{j_1}),\delta(m_{j_3},-m_{i_4}),\delta(m_{i_3},-m_{i_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_3})\},$$
$$\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_2} := \{\delta(m_{i_1},-m_{j_3}),\delta(m_{j_1},-m_{i_4}),\delta(m_{j_2},-m_{j_2}),\delta(m_{j_3},-m_{i_1}),\delta(m_{i_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_3})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_2} := \{\delta(m_{i_1},-m_{j_3}),\delta(m_{j_1},-m_{i_2}),\delta(m_{j_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_3},-m_{i_1}),\delta(m_{i_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_3})\}.$$

Alors pour prouver **(A.5)** il suffit de prendre la famillie $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^4$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^i_{1,2}$ par $\gamma^i_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^i_{1,2}$ où,

$$d^1_{1,2} := \{\delta(m_{i_1},-m_{j_3}),\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{j_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_3},-m_{i_3}),\delta(m_{i_4},-m_{i_1})\},$$
$$d^2_{1,2} := \{\delta(m_{i_1},-m_{j_3}),\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{j_2},-m_{j_1}),\delta(m_{j_3},-m_{i_4}),\delta(m_{i_4},-m_{i_3}),\delta(m_{i_4},-m_{i_1})\},$$
$$d^3_{1,2} := \{\delta(m_{i_1},-m_{j_3}),\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{j_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_3},-m_{i_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_3})\},$$
$$d^4_{1,2} := \{\delta(m_{i_1},-m_{j_3}),\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{j_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_3},-m_{i_1}),\delta(m_{i_3},-m_{i_3}),\delta(m_{i_4},-m_{j_1})\}.$$

Si d est donné par **b.)** on a $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 2 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ_2 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_2 > \tau^+_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ et γ_2, le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma > \tau^1_{\gamma_2,\gamma} > \tau^2_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_1}$ $j = 1,2$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma}$ $j = 1,2$ défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_1} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_1}$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma_2,\gamma}$, où,

$$\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{i_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_2},-m_{j_1}),\delta(m_{j_3},-m_{j_3}),\delta(m_{i_4},-m_{i_1})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{i_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_2},-m_{j_1}),\delta(m_{j_3},-m_{i_1}),\delta(m_{i_4},-m_{j_3})\},$$
$$\bar{\tau}^1_{\gamma_2,\gamma} := \{\delta(m_{j_1},-m_{j_3}),\delta(m_{i_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_2},-m_{j_2}),\delta(m_{j_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_1})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma_2,\gamma} := \{\delta(m_{j_1},-m_{j_3}),\delta(m_{i_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_2},-m_{i_1}),\delta(m_{j_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_2})\}.$$

Alors pour prouver **(A.4)** il suffit de prendre le paire $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^2$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^i_{1,2}$ par $\gamma^i_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^i_{1,2}$ où,

$$d^1_{1,2} := \{\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{i_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_2},-m_{j_3}),\delta(m_{j_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_4},-m_{i_1})\},$$
$$d^2_{1,2} := \{\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{i_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{i_4}),\delta(m_{j_2},-m_{i_1}),\delta(m_{j_3},-m_{j_1}),\delta(m_{i_4},-m_{j_3})\}.$$

Supposons maintenant que $c_1 \cap d_2$ est donné par $\{\delta(m_{j_1},-m_{j_2}),\delta(m_{j_2},-m_{j_1})\}$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ_2 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_2 > \tau^+_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ et γ_2, le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma > \tau^1_{\gamma_2,\gamma} > \tau^2_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_1}$ $j = 1,2$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma}$ $j = 1,2$ défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_1} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_1}$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma_2,\gamma}$, où,

$$\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{j_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{j_2}),\delta(m_{i_3},-m_{i_3}),\delta(m_{j_2},-m_{j_1}),\delta(m_{j_3},-m_{j_3})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{j_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{j_2}),\delta(m_{i_3},-m_{j_1}),\delta(m_{j_2},-m_{i_3}),\delta(m_{j_3},-m_{j_3})\},$$
$$\bar{\tau}^1_{\gamma_2,\gamma} := \{\delta(m_{j_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{j_3}),\delta(m_{i_3},-m_{i_3}),\delta(m_{j_2},-m_{j_2}),\delta(m_{j_3},-m_{j_1})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma_2,\gamma} := \{\delta(m_{j_1},-m_{i_2}),\delta(m_{i_2},-m_{j_3}),\delta(m_{i_3},-m_{j_1}),\delta(m_{j_2},-m_{j_2}),\delta(m_{j_3},-m_{i_3})\}.$$

Alors pour prouver **(A.4)** il suffit de prendre le paire $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^{2}$ de la façon suivant ; on définit $\gamma_{1,2}^{i}$ par $\gamma_{1,2}^{i} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}^{i}$ où,

$$d_{1,2}^{1} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$
$$d_{1,2}^{2} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_3})\}.$$

Il nous reste à voir qu'est ce qui se passe quand d_1 définit un sous-ensemble θ-invariant de cardinalité quatre. Pour d_1 on a deux possibilités,
i.)

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

$m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$, d'où c_1 est oblige à s'écrire par,

$$c_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

ii.)

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

$m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$, d'où c_1 est oblige à s'écrire par,

$$c_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$

Considérons d'abord le cas où d_1 s'écrit comme dans **i.)**. Pour $c_1 \cap d_2$ on a deux possibilités, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a l'égalité $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1})\}$ d'où les séries discrètes qui constituent d doivent êtres distribué par une des options suivants,

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

où $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ et $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{j_3}$.
Comme plus haut, le problème de trouver tout ensemble θ-invariant entre γ et γ' se ramène donc au problème de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des posibilités suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$

et,

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_3})\},$$

si, $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

si, $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{i_3} > m_{j_3} > m_{j_4}$.

$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$

si, $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{j_3} > m_{j_4}$.
Considérons maintenant le cas où d_1 est donné par **ii.)**. Pour $c_1 \cap d_2$ on a deux possibilités, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$. Pour d_2 on a l'égalité $d_2 = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1})\}$ d'où les séries discrètes qui constituent d doivent êtres distribué de la manière suivant,

$$d = \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

où $m_{j_1} > m_{i_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$. On a par conséquent réduit le problème à celle de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre d et,

$$d' := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une des posibilités suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$
$$d_2 := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.$$

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)** de l'énoncé. Pour cela il suffit de montrer, dans le cas présent, la véracité du diagramme **(A.4)** ou **(A.5)**. On le fait cas par cas.

On commence par le cas où d_1 est donné par **i.)**. Si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{j_2} > m_{j_3} > m_{j_4}$ on a $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 3 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ_2 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_2 > \tau^+_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ et γ_2, le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma > \tau^1_{\gamma_2,\gamma} > \tau^2_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_1}$ $j = 1, 2$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma}$ $j = 1, 2$ défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_1} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_1}$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma_2,\gamma}$, où,

$$\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},$$
$$\bar{\tau}^1_{\gamma_2,\gamma} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$
$$\bar{\tau}^2_{\gamma_2,\gamma} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_3})\}.$$

Alors pour prouver **(A.4)** il suffit de prendre le paire $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^2$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^i_{1,2}$ par $\gamma^i_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^i_{1,2}$ où,

$$d^1_{1,2} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},$$
$$d^2_{1,2} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{i_3})\}.$$

Si $m_{j_1} > m_{i_2} > m_{j_2} > m_{i_3} > m_{j_3} > m_{j_4}$ on a $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 2 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ et γ_2, le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma > \tau^+_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ_2 et γ', le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma_2 > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \tau^2_{\gamma',\gamma_2} > \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_i}$ $i,j = 1,2$, défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_i} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_1}$, où

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},\\
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\}.
\end{aligned}$$

Alors pour prouver **(A.5)** il suffit de prendre la famillie $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^4$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^i_{1,2}$ par $\gamma^i_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^i_{1,2}$ où,

$$\begin{aligned}
d^1_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},\\
d^2_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},\\
d^3_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},\\
d^4_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\}.
\end{aligned}$$

Si $m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{j_3} > m_{j_4}$. on a $l(\gamma_1) + 2 = l(\gamma_2) + 3 = l(\gamma)$. On choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ_2 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_2 > \tau^+_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ et γ_2, le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma > \tau^1_{\gamma_2,\gamma} > \tau^2_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_1}$ $j = 1,2$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma}$ $j = 1,2$ défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_1} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_1}$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma_2,\gamma}$, où,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},\\
\bar{\tau}^1_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\}.
\end{aligned}$$

Alors pour prouver **(A.4)** il suffit de prendre le paire $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^2$ de la façon suivant ; on définit $\gamma^i_{1,2}$ par $\gamma^i_{1,2} := (\gamma \setminus d) \cup d^i_{1,2}$ où,

$$\begin{aligned}
d^1_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\},\\
d^2_{1,2} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_2}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_1})\}.
\end{aligned}$$

Finalement si d_1 est donné par **ii.)**, on choisit entre γ et γ_1, respectivement entre γ_2 et γ', le chemin, $\gamma > \tau^+_{\gamma_1,\gamma} > \gamma_1$, respectivement, $\gamma_2 > \tau^+_{\gamma',\gamma_2} > \gamma'$. Considérons maintenant entre γ_1 et γ', respectivement γ et γ_2, le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^2_{\gamma',\gamma_1} > \gamma_1$, respectivement $\gamma > \tau^1_{\gamma_2,\gamma} > \tau^2_{\gamma_2,\gamma} > \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_1}$ $j = 1,2$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma}$ $j = 1,2$ défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_1} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_1}$, respectivement $\tau^j_{\gamma_2,\gamma} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma_2,\gamma}$, où,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},\\
\bar{\tau}^1_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_2})\}.
\end{aligned}$$

Alors pour prouver **(A.4)** il suffit de prendre le paire $\{\gamma_{1,2}i\}_{i=1}^{2}$ de la façon suivant ; on définit $\gamma_{1,2}^{i}$ par $\gamma_{1,2}^{i} := (\gamma \setminus d) \cup d_{1,2}^{i}$ où,

$$d_{1,2}^{1} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\},$$
$$d_{1,2}^{2} := \{\delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_4}), \delta(m_{j_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{j_4}, -m_{j_3})\}.$$

v.) Supposons $i = 6$. Dans ce dernière cas, pour la longueur de tout ensemble θ-invariant γ_1 contenu entre γ' et γ on a l'égalité $l(\gamma_1) = l(\gamma) - 3$. Du lemme **(4.2.4)** on sait qu'il existe dans γ un sous-ensemble d_1 donné par,

$$d_1 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},$$

$m_{i_1} > m_{i_2} > m_{i_3} > m_{i_4}$, de manière à ce que γ_1 puisse être écrit par, $\gamma_1 = (\gamma \setminus d_1) \cup c_1$, où c_1 est définit par,

$$c_1 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.$$

Le même processus doit être suivi pour aller de γ_1 à γ_2, c'est-à-dire il existe dans γ_1 un sous-ensemble d_2 définit comme d_1 tel que $(\gamma_2 \setminus d_2) \cup c_2$, avec c_2 définit comme pour γ_1. Si $c_1 \cap d_2 = \emptyset$ il est facile de voir que γ_1 et γ_2, où γ_2 est définit par,

$$\gamma_2 := \gamma \setminus d_2 \cap c_2,$$

sont les seuls ensembles θ-invariants tels que, $\gamma' < \gamma_i < \gamma,\ i = 1, 2$. Supposons $c_1 \cap d_2 \neq \emptyset$. Le lemme **(4.2.4)** nous donne pour $c_1 \cap d_2$ deux possibilités $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1})\}$ ou $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}$. Comme les deux cas sont symétriques on considérera uniquement, $c_1 \cap d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1})\}$. Du lemme **(4.2.4)**, il existe dans γ une pair de séries discrètes θ-invariantes, $\delta(m_{j_1}, -m_{j_1}),\ \delta(m_{j_2}, -m_{j_2})$, de manière à ce que $m_{i_1} > m_{j_1} > m_{j_2} > m_{i_2}$ et d_2 soit égal à,

$$d_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1})\}.$$

ce qui nous donne pour c_2 l'égalité,

$$c_2 = \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2})\}.$$

Par conséquent, le problème de trouver tout ensemble θ-invariant entre γ et γ' se ramène au problème de trouver dans $GL(12, \mathbb{R})$ tout ensemble θ-invariant entre,

$$d := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\}$$
$$d' := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\}.$$

Après inspection on conclut que tout ensemble θ-invariant entre d et d' est donné par une de deux posibilités suivants,

$$d_1 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},$$
$$d_2 := \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\}.$$

On passe maintenant à la preuve de l'égalité **(A.1)**. Notons, $\gamma_j := (\gamma \setminus d) \cup d_j,\ j = 1, 2$. Prenons entre γ et γ_1, respectivement γ et γ_2, le chemin, $\gamma > \tau_{\gamma_1,\gamma}^{1} > \tau_{\gamma_1,\gamma}^{2} > \gamma_1$, respectivement $\gamma > \tau^1_{\gamma_2,\gamma} > \tau^2_{\gamma_2,\gamma} < \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma_i,\gamma}$ $i,j = 1,2$ défini par $\tau^j_{\gamma_i,\gamma} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma_i,\gamma}$ où,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^1_{\gamma_1,\gamma} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma_1,\gamma} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},\\
\bar{\tau}^1_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma_2,\gamma} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_4}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_i}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\}.
\end{aligned}$$

On choisit aussi entre γ_1 et γ', respectivement γ_2 et γ', le chemin suivant, $\gamma_1 > \tau^1_{\gamma',\gamma_1} > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \gamma_1$, respectivement $\gamma_2 > \tau^1_{\gamma',\gamma_2} > \tau^2_{\gamma',\gamma_2} < \gamma_2$, avec $\tau^j_{\gamma',\gamma_i}$ $i,j = 1,2$ défini par $\tau^j_{\gamma',\gamma_i} := (\gamma \setminus d) \cup \bar{\tau}^j_{\gamma',\gamma_i}$ où,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_1} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_3})\},\\
\bar{\tau}^1_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\},\\
\bar{\tau}^2_{\gamma',\gamma_2} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\}.
\end{aligned}$$

Alors si on définit la famillie $\{\gamma^i_{(1,2)}\}_{i=1}^5$ par $\gamma^i_{(1,2)} := (\gamma \setminus d) \cup d^i_{1,2}$ où,

$$\begin{aligned}
d^1_{1,2} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{j_2}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{i_1})\},\\
d^2_{1,2} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\},\\
d^3_{1,2} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\},\\
d^4_{1,2} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\},\\
d^5_{1,2} &:= \{\delta(m_{i_1}, -m_{j_1}), \delta(m_{j_1}, -m_{i_2}), \delta(m_{j_2}, -m_{i_1}), \delta(m_{i_2}, -m_{i_3}), \delta(m_{i_3}, -m_{i_4}), \delta(m_{i_4}, -m_{j_2})\}
\end{aligned}$$

il nous est possible d'écrire le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & & I(\gamma) \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
I(\tau^1_{\gamma_1,\gamma}) \arrow[d] \arrow[dr] & & & & I(\tau^1_{\gamma_2,\gamma}) \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
I(\tau^2_{\gamma_1,\gamma}) \arrow[d] \arrow[dr] & I(\gamma^1_{(1,2)}) \arrow[d] \arrow[drr] & & I(\gamma^2_{(1,2)}) \arrow[d] \arrow[dr] & I(\tau^2_{\gamma_2,\gamma}) \arrow[d] \\
I(\gamma_1) \arrow[d] & I(\gamma^3_{(1,2)}) \arrow[dl] \arrow[drr] & & I(\gamma^4_{(1,2)}) \arrow[d] \arrow[dr] & I(\gamma_2) \arrow[d] \\
I(\tau^1_{\gamma',\gamma_1}) \arrow[d] & & & I(\gamma^5_{(1,2)}) \arrow[dlll] \arrow[dr] & I(\tau^1_{\gamma',\gamma_2}) \arrow[d] \\
I(\tau^1_{\gamma',\gamma_1}) \arrow[drr] & & & & I(\tau^2_{\gamma',\gamma_2}) \arrow[dll] \\
 & & I(\gamma') & &
\end{tikzcd} \qquad (A.6)$$

où on a noté une flèche à la place du morphisme **(4.16)**. Comme le morphisme **(4.16)** est proportionnel au morphisme de Johnson on peut conclure grâce au lemme **(4.2.3)** et à la suite construit par J. Johnson que tout chemin entre $I(\gamma')$ et $I(\gamma)$ est proportionnels, donc égaux, car chaque morphisme intermediaire satisfait l'égalité **(4.17)**. Par conséquent on obtient l'égalité,

$$\phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_1} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_1,\gamma} = \phi^{\omega}_{\gamma',\gamma_2} \circ \phi^{\omega}_{\gamma_2,\gamma}.$$

□

Annexe B

Construction d'un morphisme surjectif

Soit $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ une collection ordonnée d'entiers. Et soit $\overline{\pi}$ une représentation irréductible de $GL(n, \mathbb{R})$ de caractère infinitésimal celui de l'induite des caractères $|\,|^{\alpha_i}$ pour $i \in [1, n]$. On note $I(\pi)$ le module standard ayant π comme sous-module irréductible. (on travaille avec les paraboliques inférieurs)

Lemme B.0.2. *Il existe des caractères quadratiques ϵ_i pour $i \in [1, n]$ et un morphisme surjectif de l'induite des caractères $|\,|^{\alpha_i}\epsilon_i$ sur $I(\pi)$.*

Soit t un entier et σ_j pour $j \in [1, t]$ des représentations non nécessairement irréductibles de $GL(n_j, \mathbb{R})$ (ce qui définit n_j), on note alors $I(\sigma_1, \cdots, \sigma_t)$ l'induite des ces représentations à partir du parabolique inférieur dont la diagonale est formée des blocs $GL(n_j, \mathbb{R})$ pour $j \in [1, t]$.

Le lemme se démontre par récurrence sur l'entier n. Il n'y a rien à démontrer si $n = 1$ et les cas $n = 2, 3$ sont faciles. On suppose donc que $n \geq 4$. Comme $I(\pi)$ est un module standard, on écrit :

$$I(\pi) = I(\delta, \sigma'),$$

où δ d'une série discrète modulo le centre de $GL(d_1, \mathbb{R})$ avec $d_1 = 1$ ou 2 et où σ' est lui-même un module standard pour $GL(n - d_1, \mathbb{R})$. On peut toujours supposer que la représentation de $GL(d_1, \mathbb{R})$ est soit un caractère de valeur abolue α_1 (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto |x|^{\alpha_1}\epsilon_1(x)$, où ϵ_1 est un caractère quadratique) soit une série discrète modulo le centre de la forme (α_1, α_i) avec $i \in [2, n]$.

Dans le premier cas, on conclut par récurrence de façon évidente : on applique le lemme à σ' qui est le module standard d'une représentation irréductible ayant les propriétés du lemme pour α_i avec $i \in [2, n]$. Donc il existe des caractères quadratiques ϵ_i pour $i \in [2, n]$ tel que σ' soit un quotient de $I(|\,|^{\alpha_2}\epsilon_2, \cdots, |\,|^{\alpha_n}\epsilon_n)$. On reprend la description de δ déjà donnée. On utilise le fait que l'induction est un foncteur exact pour en déduire que $I(\delta, \sigma')$ est un quotient de $I(|\,|^{\alpha_1}\epsilon_1, |\,|^{\alpha_2}\epsilon_2, \cdots, |\,|^{\alpha_n}\epsilon_n)$.

Considérons le deuxième cas : ici δ est une série discrète de la forme (α_1, α_i) avec $i \in [2, n]$ et $\alpha_1 > \alpha_i$. La représentation σ' est encore le module standard d'une représentation irréductible qui vérifie les hypothèses du lemme pour la collection des α_j avec $j \in [2, n] - \{i\}$. On applique encore le lemme par récurrence. On écrit σ' comme quotient de $I(|\,|^{\alpha_j}\epsilon_j; j \in [2, n] - \{i\})$. Ainsi $I(\pi)$ est un quotient de l'induite :

$$I(\delta, |\,|^{\alpha_2}\epsilon_2, |\,|^{\alpha_j}\epsilon_j; j \in [3, n] - \{i\}).$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$ l'induite $I(\delta, |\,|^{\alpha_2}\epsilon_2)$ est irréductible et donc isomorphe à $I(|\,|^{\alpha_2}\epsilon_2, \delta)$. Mais comme $\alpha_1 = \alpha_2$ on est ramené au cas précédent.

On considère maintenant le cas où $\alpha_1 > \alpha_2 \geq \alpha_i$. Si $\alpha_2 = \alpha_i$, on a aussi $\alpha_j = \alpha_2$ pour $j \in [2, i]$. Comme δ est un quotient de $I(|\,|^{\alpha_1}\epsilon_1, |\,|^{\alpha_i})$ pour un caractère quadratique ϵ_1 convenable, on voit que $I(\pi)$ est un quotient de $I(|\,|^{\alpha_1}\epsilon_1, |\,|^{\alpha_i}, |\,|^{\alpha_j}\epsilon_j; j \in [2, n] - \{i\})$ ce qui est le résultat annoncé en renumérotant les indices.

Il reste le cas où $I(\delta, |\,|^{\alpha_2}\epsilon_2)$ est un quotient de $I(|\,|^{\alpha_1}\epsilon_1, \delta')$ où δ' est la série discrète de $GL(2, \mathbb{R})$ que l'on a noté (α_2, α_i) et où ϵ_1 est un caractère quadratique convenable. Comme $I(\delta, |\,|^{\alpha_j}\epsilon_j; j \in [3, n] - \{i\})$ est un module standard à qui on peut appliquer le lemme, on conclut comme dans le premier cas.

Bibliographie

[AJ87] Jeffrey ADAMS et Joseph F. JOHNSON : Endoscopic groups and packets of non-tempered representations. *Compositio Math.*, 64(3):271–309, 1987.

[Art89a] James ARTHUR : Intertwining operators and residues. I. Weighted characters. *J. Funct. Anal.*, 84(1):19–84, 1989.

[Art89b] James ARTHUR : Unipotent automorphic representations : conjectures. *Astérisque*, (171-172):13–71, 1989. Orbites unipotentes et représentations, II.

[Art13] James ARTHUR : *The endoscopic classification of representations*, volume 61 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. Orthogonal and symplectic groups.

[BGG75] I. N. BERNŠTEĬN, I. M. GEL′FAND et S. I. GEL′FAND : Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules. *In Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971)*, pages 21–64. Halsted, New York, 1975.

[BW80] Armand BOREL et Nolan R. WALLACH : *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, volume 94 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1980.

[Has79] Michihiko HASHIZUME : Whittaker models for real reductive groups. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 5(2):349–401, 1979.

[Hum08] James E. HUMPHREYS : *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, volume 94 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Joh84] Joseph F. JOHNSON : Lie algebra cohomology and the resolution of certain Harish-Chandra modules. *Math. Ann.*, 267(3):377–393, 1984.

[KS99] Robert E. KOTTWITZ et Diana SHELSTAD : Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque*, (255):vi+190, 1999.

[LS87] R. P. LANGLANDS et D. SHELSTAD : On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, 278(1-4):219–271, 1987.

[LW13] Jean-Pierre LABESSE et Jean-Loup WALDSPURGER : *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*, volume 31 de *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. With a foreword by Robert Langlands [dual English/French text].

[Mez] Paul MEZO : Tempered spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups.

[Mœg] Colette MŒGLIN : Calcul du facteur de transfert spectral pour les représentations tempérées dans le cas archimédien. *preprint*.

[Mœg14] Colette Mœglin : Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue ; leur paramètre de Langlands. *In Automorphic forms and related geometry : assessing the legacy of I. I. Piatetski-Shapiro*, volume 614 de *Contemp. Math.*, pages 295–336. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[Sha74] J. A. Shalika : The multiplicity one theorem for GL_n. *Ann. of Math. (2)*, 100:171–193, 1974.

[Sha80] Freydoon Shahidi : Whittaker models for real groups. *Duke Math. J.*, 47(1):99–125, 1980.

[Sha10] Freydoon Shahidi : *Eisenstein series and automorphic L-functions*, volume 58 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[She81] D. Shelstad : Embeddings of L-groups. *Canad. J. Math.*, 33(3):513–558, 1981.

[She82] D. Shelstad : L-indistinguishability for real groups. *Math. Ann.*, 259(3):385–430, 1982.

[She12] D. Shelstad : On geometric transfer in real twisted endoscopy. *Ann. of Math. (2)*, 176(3):1919–1985, 2012.

[Spe82] Birgit Speh : The unitary dual of $\mathrm{Gl}(3, \mathbf{R})$ and $\mathrm{Gl}(4, \mathbf{R})$. *Math. Ann.*, 258(2):113–133, 1981/82.

[Spr98] T. A. Springer : *Linear algebraic groups*, volume 9 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second édition, 1998.

[Tai] Olivier Taibi : Dimensions of spaces of level one automorphic forms for split classical groups using the trace formula. *preprint*.

[Vog83] David A. Vogan : Irreducible characters of semisimple Lie groups. III. Proof of Kazhdan-Lusztig conjecture in the integral case. *Invent. Math.*, 71(2):381–417, 1983.

[VZ84] David A. Vogan, Jr. et Gregg J. Zuckerman : Unitary representations with nonzero cohomology. *Compositio Math.*, 53(1):51–90, 1984.